Décomposition de Dunford

Références : : Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*, 4.4.2
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 2*, 4.25

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d,n) avec d diagonalisable et n nilpotent, $f = d+n$ et d et n commutent. De plus d et n sont des polynômes en f.

Lemme.

Soit F un polynôme annulateur de f, on note $F = \beta \prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles et $N_i = \mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(f))$. Alors $E = \bigoplus N_i$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Démonstration. Le lemme des noyaux donne $E = \bigoplus N_i$. Puis on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$.
Les Q_i n'ont aucun facteur commun ensemble donc par Bézout, il existe U_1, ..., U_s tel que $\sum U_i Q_i = 1$ [1].
On a donc $\sum U_i(f) \circ Q_i(f) = Id$; il est logique de poser $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$. On va montrer que p_i est le projecteur recherché.

- Les p_i sont des projecteurs :

Pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(f) \circ U_i U_j(f)$. Or $F | Q_i Q_j$, donc $p_i \circ p_j = 0$.
On a $\sum p_j = Id$, donc en composant par p_i, on a $p_i = p_i \circ p_i$. Les p_i sont donc bien des projecteurs.

- $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$:

Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$, alors $M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(y) = F(f) \circ U_i(f)(y) = 0$. Donc $\mathrm{Im}(p_i) \subset N_i$.
Puis soit $x \in N_i = \mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(f))$, alors on sait que $x = \sum p_j(x)$. Or si $j \neq i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} | Q_j$. D'où $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$.

- $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$:

Soit $j \neq i$, $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j} | Q_i$. Donc $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$.
Puis soit $x \in \mathrm{Ker}(p_i)$, alors $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$ car $\mathrm{Im}(p_j) = N_j$.

- Les p_i sont des polynômes en f par construction. □

Démonstration. Existence : on applique le lemme précédent au polynôme $\chi_f = (-1)^n \prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Les N_i sont les sous-espaces caractéristiques.
On pose $d = \sum \lambda_i p_i$ (d est donc diagonalisable) et $n = f - d = \sum (f - \lambda Id) p_i$.
Comme pour tout i et $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0$ et $p_i^2 = p_i$, et comme les p_i commutent avec f (car ce sont des polynômes en f), on a $n^q = \sum (f - \lambda Id)^q p_i$. En particulier, si on pose $\alpha = \max(\alpha_i)$, on a $n^\alpha = 0$. Donc n est nilpotente.
Enfin, d et n sont des polynômes en f donc commutent.

Unicité : on se donne un nouveau couple (d', n') solution du problème (pas forcément un polynôme en f). n' commute avec d', donc commute avec $f = d' + n'$. Comme n est un polynôme en f, n' commute avec n. On

1. En effet, $\{\sum U_i Q_i, U_i\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, anneau principal, donc il est engendré par un polynôme unitaire m. m divise alors Q_i pour tout i, donc $m = 1$ car ils sont premiers entre eux.

peut prouver de même que d' commute avec d.
Les endomorphismes d et d' sont donc codiagonalisables. D'où $d - d'$ est diagonalisable. Or $d - d' = n' - n$ est nilpotente ($n' - n$ nilpotente car n et n' commutent) donc $d - d'$ n'a que la valeur propre 0, donc $d = d'$, puis $n = n'$.
(Merci à Anne-Elisabeth Falq pour la correction) $\square$

Remarques : → Pour trouver les projecteurs explicitement, on utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles (voir Gourdon).
→ Ce théorème peut être généralisé sur $\mathbb{R}$ si χ_f n'est pas scindé. On obtient alors s semi simple au lieu de diagonalisable.
→ Si il n'y a qu'un seul espace caractéristique N_1, on a $p_1 = id$. D est alors la matrice diagonale constitué de l'unique valeur propre, et N est la différence de A et D.

Corollaire.

Les seules matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$ sont les matrices diagonalisables dont le spectre est contenu dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit A telle que $\exp(A) = I_n$. On écrit $A = D + N$.
On rappelle que la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)N'$ où $N' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.
Par unicité de la décomposition de Dunford, il faut $\exp(D) = I_n$ et $\exp(D)N' = 0$. Donc $N' = 0$.
Or $N' = NP(N)$ où $P(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}$. Dans une base trigonalisant N, on a donc $P(N)$ triangulaire supérieure avec une diagonale de 1, donc $P(N)$ est inversible, donc $N = 0$.
On en déduit ainsi que $A = D$ est diagonalisable.
Puis, comme $\exp(\mathrm{Sp}(A)) = \mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{1\}$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque : Ce corollaire ne donne pas énormément d'informations en plus sur les matrices réelles dont l'exponentielle est l'identité.
Un bon exemple à retenir d'une telle matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$.