Devoir Maison - Intégration et analyse complexe

→ Je vous encourage fortement à bien justifier les hypothèses des théorèmes que vous utilisez pour vous entraîner.
→ Si vous avez une question, n'hésitez pas à me l'envoyer à adrien-ange.laurent@ens-rennes.fr.
→ BON COURAGE !

Exercice 1 : On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi x)}{x} e^{-tx} \mathrm{d}x.$$

1) En utilisant le fait que $\sin(2\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\pi x$, montrer que l'intégrale est bien définie (c'est à dire que la fonction intégrée est bien intégrable).

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f'(t) = -\int_0^\infty \sin(2\pi x) e^{-tx} \mathrm{d}x.$$

3) Avec le théorème de convergence dominée appliqué à $f_t(x) = \sin(2\pi x)e^{-tx}$, trouver la limite de f en l'infini.
(Rappel : vous avez le droit d'appliquer le théorème de convergence dominée pour une suite indexée sur des réels et non du type f_n, $n \in \mathbb{N}$.)
Indice : prenez $t \in [1, +\infty[$ pour dominer plus simplement $f_t(x)$.

4) En remarquant que $\sin(2\pi x) = \mathrm{Im}(e^{2i\pi x})$ et en faisant apparaître une transformée de Fourier, calculer explicitement $f'(t)$.

5) En déduire que

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{t}{2\pi}\right).$$

Exercice 2 : Pour $a > 0$, on pose $f(x) = e^{-a|x|}$.

1) Trouver la transformée de Fourier de f en justifiant pourquoi $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

3) En étudiant les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$, montrer que

$$f * f(x) = e^{-a|x|}\left(|x| + \frac{1}{a}\right).$$

4) En déduire que la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est

$$x \mapsto \pi^2 e^{-2\pi|x|}\left(|x| + \frac{1}{2\pi}\right).$$

5) Quelle est la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$?

Exercice 3 : On note $\mathcal{C}$ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.

1) Calculer $\int_{\mathcal{C}} z^p \mathrm{d}z$.

2) À l'aide de la formule du binôme de Newton et du résultat précédent, montrer que

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \binom{2n}{n}.$$

3) En déduire la valeur de
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 4 : Soient $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$$

1) Justifier que
$$\binom{n+p}{p} := \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!},$$
et en déduire que le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

2) Montrer que
$$(n+1)\binom{n+p+1}{p} - n\binom{n+p}{p} = (p+1)\binom{n+p}{p}.$$

3) En déduire que f vérifie l'équation différentielle
$$(1-z)f'(z) = (p+1)f(z).$$

4) Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, f(z) = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}.$$

Exercice 5 : Justifier que les objets suivants n'existent pas.

1) $\mathrm{Log}(-1)$

2) $\widehat{H}$ et $\widehat{e^{ix}}$

3) $\int_{\mathbb{R}^{+*}} e^x \mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}^{+*}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$