Devoir Maison - Corrigé

Exercice 1 :

1) On pose

$$f_t(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{x} e^{-tx}.$$

Soit t fixé dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors, $x \mapsto f_t(x)$ est continue sur $]0, \infty[$. Les seuls problèmes d'intégrabilité sont donc en 0 et ∞.
En 0, l'équivalent permet de prolonger par continuité g par $(t, 0) = 2\pi$.
En ∞, on utilise que

$$|f_t(x)| \leqslant \frac{1}{x} e^{-tx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

grâce à l'exponentielle décroissante.
On en déduit que $g(t, x) \in L^1$ à t fixé dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque : J'ai fait une erreur ici. f est défini au sens de Lebesgue uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et non sur $\mathbb{R}^+$. En effet, en $t = 0$, vous aurez reconnu l'intégrale de $\frac{\sin(y)}{y}$ dont nous avons vu qu'elle n'était pas défini au sens de Lebesgue. Mais on peut la définir au sens Riemann généralisé, comme nous l'avons fait dans les premiers TD.

2) On utilise le théorème de continuité sous l'intégrale d'abord avec la majoration **indépendante de** t

$$|f_t(x)| \leqslant \frac{1}{x} e^{-ax} \in L^1.$$

On obtient ainsi que f est continue.
Puis on utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale avec la majoration **toujours indépendante de** t

$$\left|\frac{\partial f_t(x)}{\partial t}\right| \leqslant e^{-ax} \in L^1.$$

Ainsi la fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, \infty[$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$ car a est quelconque.

3) Pour $t \in [1, +\infty[$, on domine simplement

$$|f_t(x)| \leqslant \frac{1}{x} e^{-x} \in L^1$$

Puis on remarque que

$$\lim_{t \to \infty} f_t(x) = 0,$$

donc par convergence dominée,

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \int_0^\infty 0 = 0.$$

4) On a

$$f'(t) = -\operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{2i\pi x} e^{-tx} \mathrm{d}x\right).$$

On reconnaît une transformée de Fourier classique évaluée en $\xi = -1$:

$$\int_0^\infty e^{2i\pi x} e^{-tx} \mathrm{d}x = \frac{1}{t - 2i\pi}.$$

Donc

$$f'(t) = -\frac{2\pi}{t^2 + 4\pi^2}.$$

5) Les primitives de $f'(t)$ sont de la forme

$$-\arctan\left(\frac{t}{2\pi}\right) + C$$

avec C une constante.
Or $f(t)$ tend vers 0 en l'infini (par la question 3), donc C doit vérifier

$$C = \lim_{t\to\infty} \arctan\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où le résultat.

Exercice 2 :

1) vu en cours.

2) Inversion de Fourier en prenant $a = 2\pi$.

3) On a

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a(|x-y|+|y|)}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty} e^{-a(|x-y|+y)}\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0} e^{-a(|x-y|-y)}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

On sépare ensuite les cas x positifs ou négatifs et c'est juste de l'intégration de fonctions exponentielles.
On peut aussi remarquer que la fonction est paire, ainsi on n'a qu'un cas à faire.

4) On a pour $a = 2\pi$:

$$\widehat{f * f}(x) = \hat{f} \times \hat{f}(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Par inversion de Fourier,

$$\mathcal{F}\left(\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi^2)^2}\right)(x) = f * f(-x).$$

5) On remarque que la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. On utilise alors les relations de compatibilité entre la TF et les dérivées et on trouve

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = -i\pi^2\xi e^{-2\pi\xi}.$$

Exercice 3 :

1) On paramétrise le cercle par $\mathcal{C} = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[\}$, alors

$$\int_{\mathcal{C}} z^p \mathrm{d}z = \int_0^{2_p i} e^{ip\theta} \times ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 2i\pi\delta_{0,p+1}.$$

2) On a en utilisant la question précédente :

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\mathcal{C}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2i\pi\delta_{0,2n-2k} = 2\pi i \binom{2n}{n}.$$

3) On applique le changement de variable vu en cours $z = e^{i\theta}$:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \times \frac{1}{2^{2n}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{2\pi i}{2^{2n} i}\binom{2n}{n} = 2\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Remarque : le calcul de cette intégrale est une version particulière du calcul d'une intégrale dite de Wallis. Celles-ci permettent d'obtenir des approximations de π, mais aussi de démontrer la fameuse formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 4 :

1) Il suffit d'utiliser la compatibilité de l'équivalent avec le produit. Puis on peut utiliser le lemme d'Abel par exemple pour trouver le rayon de convergence.

2) simple calcul.

3) On peut dériver sous le signe somme une série entière sur son disque de convergence. En utilisant la question précédente, on a l'équation différentielle sur le rayon de convergence.

4) On sait résoudre l'équation différentielle précédente sur $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $B(0,1)$ et on remarque qu'elle est holomorphe, donc comme f est holomorphe et qu'elles coïncident sur $\mathbb{R}$, elles sont égales.

Exercice 5 :

1) Log n'est pas défini sur $\mathbb{R}^-$

2) H et e^{ix} ne sont ni dans $\mathbb{L}^1$, ni dans L^2.

Remarque : On peut à vrai dire donner un sens à ces expressions, mais il faut se placer dans un espace plus grand appelé espace des distributions tempérées, ie l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace de Schwartz pour une certaine topologie. Ce sera pour plus tard...

3) $e^x \notin L^1(\mathbb{R}^{+*})$ et $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \notin L^1(\mathbb{R}^{+*})$ (car équivalent à $\frac{1}{x}$ en l'infini).