

Mémoire de Master 2
à l'Université de Rennes 1

**Leçon 160 - Endomorphismes remarquables
d'un espace vectoriel euclidien (de dimension
finie)**

Adrien Laurent
École Normale Supérieure de Rennes & Université de Rennes 1

Encadrant : Matthieu Romagny

Novembre 2015

Table des matières

Introduction	2
1 Leçon 160	3
I Endomorphisme adjoint	3
1 Définition de l'adjoint	3
2 Adjoints remarquables	4
II Endomorphismes normaux et réduction	5
1 Premières propriétés	5
2 Réduction	5
III Endomorphismes orthogonaux	7
1 Quelques propriétés	7
2 Application en dimension 2 et 3	8
3 Propriétés algébriques et topologiques	10
IV Endomorphismes symétriques	11
1 Propriétés et réduction	11
2 Décomposition polaire	12
3 Autres applications	13
2 Développements proposés	14
I Ellipsoïde de John-Loewner	14
II Exponentielle des matrices symétriques	17
III Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$	19
IV $SO_3(\mathbb{R})$ est simple	21
V Réduction des endomorphismes normaux	23
3 Questions	26

Introduction

La leçon 160 traite des endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien. On présentera donc les endomorphismes ayant un lien avec la structure euclidienne de l'espace. On partira de la notion d'adjoint, pour arriver aux endomorphismes normaux et leur théorème de réduction. Puis on appliquera ce théorème sur d'autres endomorphismes plus spéciaux : les endomorphismes symétriques et orthogonaux. On s'efforcera de voir autant les propriétés des ensembles d'endomorphismes que des endomorphismes eux-mêmes. Le mémoire sera aussi parcouru d'exemples et d'applications intéressantes.

Il est important de préciser ce qui n'a pas lieu d'être dans cette leçon. On connaît bien d'autres endomorphismes remarquables que les endomorphismes normaux : les inversibles, les diagonalisables... Néanmoins l'étude de ceux-ci ne requiert pas fondamentalement l'utilisation de la structure euclidienne. C'est pourquoi on ne présentera que des propriétés liées de près ou de loin au produit scalaire.

Pour finir, j'ai rajouté quelques commentaires et preuves par rapport à la leçon originale pour l'agrémenter de choses que j'ai pensé être importantes et sur lesquelles j'aurais insisté si j'avais fait de cette leçon un vrai cours.

Chapitre 1

Leçon 160

Dans toute cette leçon, E désigne un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie), muni d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) .

I Endomorphisme adjoint

1 Définition de l'adjoint

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que $\forall x, y \in E, (f(x), y) = (x, f^*(y))$. L'application f^* est appelé endomorphisme adjoint de f .

Exemple : L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la forme bilinéaire $B : (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN)$ est un espace vectoriel euclidien. Si on définit l'application $\phi_A : M \mapsto {}^tAMA$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé, alors son adjoint est ϕ_{t_A} .

En effet, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B(\phi_A(X), Y) = \text{Tr}({}^t({}^tAXA)Y) = \text{Tr}({}^tA{}^tXAY) = \text{Tr}({}^tXAY{}^tA) = B(X, \phi_{t_A}(Y))$.

Proposition 2.

Si M est la matrice de f dans une base orthonormée, alors la matrice de f^* dans cette base est tM .

Proposition 3.

- L'application $*$: $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & f^* \end{cases}$ est linéaire et involutive (c'est à dire bijective de bijection réciproque elle-même).
- Pour tous f, g dans $\mathcal{L}(E)$, on a $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $\text{rg}(f^*) = \text{rg}(f)$ et $\det(f^*) = \det(f)$.
- Pour tout f dans $\mathcal{L}(E)$, $\text{Ker}(f)^\perp = \text{Im}(f^*)$, $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$.

2 Adjoint remarquables

Définition 4.

$f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si f et f^* commutent.

De manière similaire, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si M et tM commutent.

Exemples : Les endomorphismes définis ci-dessous sont tous normaux.

Définition 5.

• f est symétrique si $f^* = f$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble de tels f .

M est symétrique si ${}^tM = M$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles M .

• f est antisymétrique si $f^* = -f$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble de tels f .

M est antisymétrique si ${}^tM = -M$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles M .

• Si $f \circ f^* = f^* \circ f = id$, alors f est dit orthogonal. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble de tels f .

De même, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n = M{}^tM\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales.

Proposition 6.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Quant à lui, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication. C'est même une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $GL_n(\mathbb{R})$. En l'identité le plan tangent est l'ensemble des matrices antisymétriques.

Il en va de même pour les ensembles d'endomorphismes correspondants.

Remarque : Tous les sous-ensembles des matrices normales définis jusque là ont une structure de groupe ou d'espace vectoriel. Néanmoins ce n'est pas le cas pour l'ensemble des matrices normales.

II Endomorphismes normaux et réduction

1 Premières propriétés

Proposition 7.

$f \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Proposition 8.

Soit f un endomorphisme normal et F un sous espace vectoriel stable par f , alors F^\perp est stable par f^* .

Remarque : la proposition précédente est simple mais elle est fondamentale. C'est grâce à elle que nous pourrons prouver le théorème de réduction. C'est pourquoi nous allons en faire la preuve rapidement.

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$, et $y \in F$, alors $(f^*(x), y) = (x, f(y))$. Or $f(y) \in F$ car F est stable par f , donc, comme $x \in F^\perp$, $(f^*(x), y) = 0$. Comme c'est vrai pour tout y dans F , $f^*(x) \in F^\perp$. \square

Corollaire 9.

Soit f un endomorphisme normal, et E_λ un sous espace propre de f , alors E_λ^\perp est stable par f .

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda$, alors $ff^*(x) = f^*f(x) = \lambda f^*(x)$ donc $f^*(x) \in E_\lambda$, donc E_λ est stable par f^* .

On déduit du résultat précédent que E_λ^\perp est stable par $(f^*)^* = f$. \square

2 Réduction

Sur un espace hermitien, les endomorphismes normaux sont diagonalisables. Sur un espace euclidien, c'est faux mais on a tout de même un résultat très intéressant.

III Endomorphismes orthogonaux

1 Quelques propriétés

Proposition 12.

On a équivalence entre les assertions suivantes :

1. $f \in O(E)$,
2. $\forall x, y \in E, (f(x), f(y)) = (x, y)$,
3. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$,
4. si \mathcal{B} est une base orthonormée de E , $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$.

Remarque : Si on se donne \mathcal{E} un espace affine, d'espace vectoriel associé E , alors $O(E)$ est l'ensemble des isométries linéaires (c'est à dire une application linéaire bijective conservant les distances). En fait, on montre que $Is(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \times O(E)$ où $Is(\mathcal{E})$ est l'ensemble des isométries affines de \mathcal{E} . Étudier $O(E)$ permet donc de mieux comprendre $Is(\mathcal{E})$ car ses éléments sont la composée d'une translation avec un élément de $O(E)$.

Proposition 13.

- $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si et seulement si il transforme une/toute base orthonormée en base orthonormée.
- La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est orthogonale.

Proposition 14.

Soit $f \in O(E)$, alors $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ et $\det(f) = \pm 1$.

Remarque : attention, la réciproque est fausse! $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale et pourtant $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$ et $\det(M) = 1$.

Application : on peut utiliser la proposition précédente pour définir un sous-groupe très utile de $O(E)$:

Définition 15.

- Les transformations orthogonales de déterminant 1 sont dites directes. Les autres sont dites indirectes.
- On définit $SO(E)$ comme l'ensemble des transformations orthogonales directes. De même, on pose $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$ pour les matrices.
- Ces deux ensembles sont en fait des sous-groupes distingués de $O(E)$ (respectivement $O_n(\mathbb{R})$), on les appelle les groupes spéciaux orthogonaux.

Pour mieux comprendre la structure de $O(E)$, on va maintenant lui appliquer notre théorème de réduction.

Théorème 16.

Si $f \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E dans laquelle

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$, $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

De même, si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors elle est orthogonalement semblable à une telle matrice.

2 Application en dimension 2 et 3

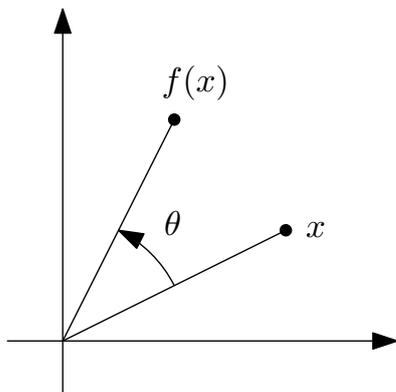
On est maintenant en mesure de comprendre complètement la structure des isométries linéaires en dimensions 2 et 3.

Proposition 17.

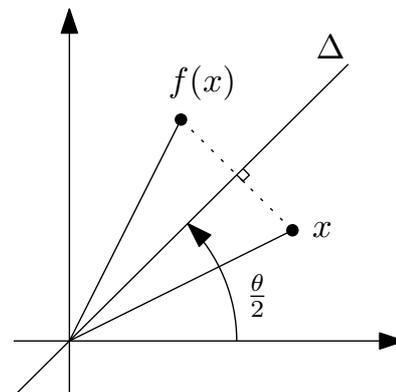
On a $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$. C'est l'ensemble des rotations d'angle θ autour de 0.

Puis $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$. Ce sont les symétries orthogonales par rapport à la droite passant par 0 et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.

Sur ces dessins, on voit les deux types d'éléments de $O(E)$ avec E de dimension 2, donc les deux types de parties linéaires possibles pour des isométries de E .



$f \in SO(E)$ est une rotation.



$f \in O(E) \setminus SO(E)$ est une symétrie.

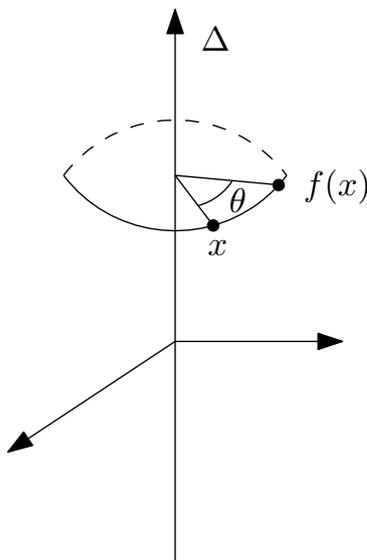
Proposition 18.

Toute matrice M dans $O_3(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ avec $\epsilon = 1$ si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ et $\epsilon = -1$ sinon.

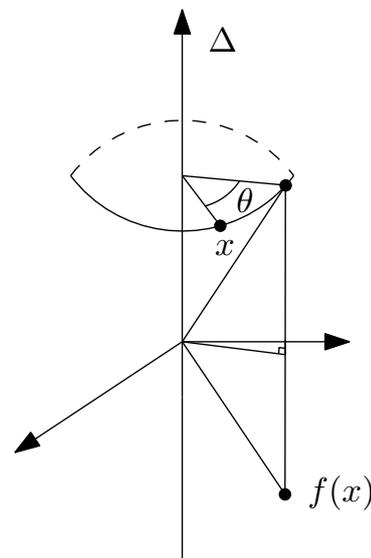
Dans le premier cas, M est une rotation, dans le deuxième, c'est une rotation composée avec une symétrie.

Pour E de dimension 3, on obtient des résultats similaires à la dimension 2. Il faut juste faire attention au fait qu'un changement de base peut être nécessaire en dimension 3 pour trouver l'axe de rotation.

De plus, l'axe de rotation est dirigé par le vecteur propre associé à la valeur propre 1 ou -1. On complète ce vecteur pour former une base directe (e_1, e_2, e_3) . La rotation se fait dans le plan (e_2, e_3) .



$f \in SO(E)$ est une rotation d'axe Δ et d'angle θ .



$f \in O(E) \setminus SO(E)$ est une symétrie.

Application : soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

L'axe de rotation est dirigé par les vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On trouve $E_1 = \text{Vect}(u_0)$ avec $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis $\text{Tr}(A) = 2 = 1 + 2 \cos(\theta)$ avec θ l'angle de la rotation. On en déduit $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$.

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1^\perp$. En calculant, on trouve que $\sin(\theta) = \frac{\det(u, Au, u_0)}{\|u\|^2 \|u_0\|} > 0$. On en déduit donc

$\theta = \frac{\pi}{3}$. Ainsi A représente la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Propriétés algébriques et topologiques

On va présenter ici un inventaire, bien sûr lacunaire, de quelques propriétés des groupes orthogonaux. On en verra d'autres une fois que la décomposition polaire sera vue.

Proposition 19.

Les ensembles $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes compacts.

Proposition 20.

Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. De son côté, $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes, homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 21.

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales (symétries par rapport à un hyperplan).
Quant à lui, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements orthogonaux (symétries par rapport à un sous espace vectoriel de codimension 2).

Proposition 22.

Tout sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.

On prouvera la proposition suivante à la fin de notre développement sur le théorème de réduction des endomorphismes normaux. C'est un résultat qui peut être relié à la théorie des groupes de Lie.

Proposition 23.

L'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Enfin pour finir, une proposition dont la preuve sera proposée en développement :

Proposition 24.

Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

IV Endomorphismes symétriques

1 Propriétés et réduction

On commence par rappeler la décomposition intuitive de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

Proposition 25.

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Puis on arrive au théorème de réduction appliqué aux matrices symétriques. On l'appelle en pratique le *théorème spectral*.

Théorème 26 (Théorème spectral).

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} constituée de vecteurs propres de f telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

De même, si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

On peut directement appliquer ce théorème à l'étude des matrices de formes bilinéaires. On rappelle que ce sont exactement les matrices symétriques.

Définition 27.

$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X M X \geq 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des telles matrices.

$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est définie positive si de plus ${}^t X M X = 0 \Rightarrow X = 0$. On note $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 28.

- $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de produit scalaire si et seulement si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
- Si ϕ est une forme quadratique sur E , alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale réelle.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, on trouve après calculs que $\text{Sp}(A) = \{2, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc A définit un produit scalaire.

Application : la proposition suivante constitue un résultat géométrique sympathique prouvé avec la réduction de formes quadratiques. La preuve est à trouver avec les développements.

Proposition 29 (Ellipsoïde de John-Loewner).

Soit K un compact de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K .

2 Décomposition polaire

On voit dans cette partie une application particulièrement belle et utile du théorème spectral : la décomposition polaire.

Lemme 30 (Réduction simultanée).

Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors f et g se diagonalisent dans une même base orthonormée de vecteurs propres.

Démonstration. f et g se diagonalisent chacun dans une base orthonormée de vecteurs propres. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les espaces propres correspondants. Comme f et g commutent, les E_{λ_i} sont stables par g . La restriction de g à E_{λ_i} est autoadjointe donc il existe une base \mathcal{B}_i orthonormée de E_{λ_i} constituée de vecteurs propres de g qui diagonalise $g|_{E_{\lambda_i}}$. Si on concatène les bases \mathcal{B}_i , on obtient une base orthonormée \mathcal{B} (car les E_{λ_i} sont orthogonaux), de vecteurs propres pour f et g et qui diagonalise f et g . \square

Le prochain lemme est une application directe du théorème spectral.

Lemme 31.

Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = M$. Si de plus $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 32 (Décomposition polaire).

L'application
$$\begin{array}{ccc} \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$
 est un homéomorphisme.

Démonstration. La continuité de cette application est évidente.

- Surjectivité

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on appelle $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'unique racine carrée de ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, puis on pose $O = MS^{-1}$. On vérifie facilement que $O \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

- Injectivité

Si $M = OS = O'S'$, alors $S^2 = {}^tMM = S'^2$, donc par unicité de la racine carrée, on a $S = S'$,

d'où $O = O'$.

- Continuité de l'inverse

On se donne une suite convergente de $GL_n(\mathbb{R}) : (M_p) = (O_p S_p)$ converge vers $M = OS$. Le but est de montrer que (O_p) et (S_p) convergent vers O et S .

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire une sous-suite n_k qui converge vers un certain O_0 . Alors S_{n_k} converge vers $S_0 = {}^t O_0 M$ qui est symétrique positive car $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé. Comme O_0 est orthogonale, S_0 définie positive.

On a donc $M = OS = O_0 S_0$. Par unicité, on a donc $O = O_0$ et $S = S_0$.

(O_p) n'a qu'une valeur d'adhérence sur le compact $O_n(\mathbb{R})$, donc converge. D'où, (S_p) converge vers S . \square

Remarque : on peut prolonger cette décomposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais ce faisant, on perd l'unicité et la définie positivité. On a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$.

Application : La preuve de la proposition suivante est un de nos développements.

Proposition 33.

Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ sont exactement les points de $O(E)$.

3 Autres applications

La première application est détaillée en développement.

Proposition 34.

L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin pour finir, voici un théorème sympathique qui, avec un peu de travail, permet de démontrer le théorème de Sylvester (voir [3]).

Théorème 35 (Minimax de Courant-Fischer).

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres, soit A_h l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension h , alors on a

$$\forall h \in [1, n], \lambda_h = \min_{F \in A_h} \left(\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x) \right) = \max_{F \in A_{n-h+1}} \left(\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x) \right).$$

Chapitre 2

Développements proposés

I Ellipsoïde de John-Loewner

Références : : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*, 3.37

On se place sur \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne usuelle.

Un ellipsoïde centré en l'origine est une quadrique définie par une équation du type $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} = 1$, quitte à appliquer la méthode de Gauss. Un ellipsoïde plein centré en l'origine est donc défini intuitivement par l'équation $q(x) \leq 1$ où q est une forme quadratique définie positive (id est de signature $(n, 0)$). On notera ε_q l'ellipsoïde plein associé à q et Q (resp. Q^+ , Q^{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, définies positives).

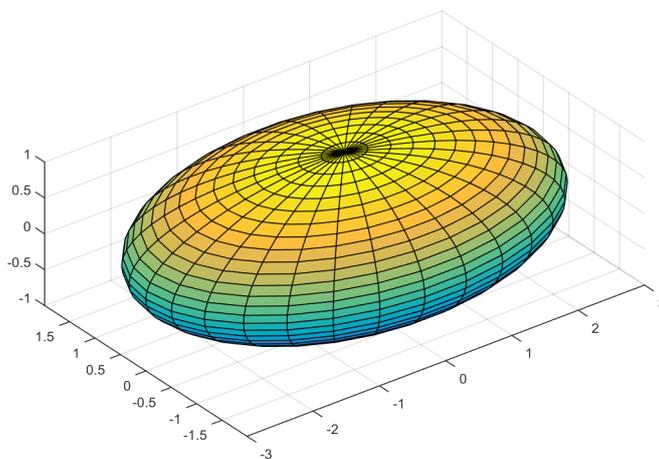


FIGURE 2.1 – L'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$

Théorème.

Soit K un compact de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

Démonstration. • Commençons par nous donner une forme quadratique q définie positive et calculons le volume V_q de ε_q .

On utilise le théorème spectral pour dire qu'il existe une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien et orthogonale pour q . On la note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

q s'écrit dans cette base $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$, donc $\det(q) = a_1 \dots a_n$.

On a donc $V_q = \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$.

On fait le changement de variable avec $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{x_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{a_n}})$. On a bien un \mathcal{C}^1 difféomorphisme et le jacobien est $\frac{1}{\sqrt{\prod a_i}}$.

En notant $D(q) = \det(q)$, on a donc $V_q = \frac{1}{\sqrt{D(q)}} \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$ où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne.¹

→ Le problème se ramène donc à celui-ci : il existe une unique forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et pour tout $x \in K$, $q(x) \leq 1$.

On introduit maintenant la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ sur l'espace Q^2 et on définit l'ensemble $\mathcal{A} = \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\} \subset Q$. On va chercher à maximiser D sur ce domaine.

- \mathcal{A} est convexe :

$\lambda q + (1 - \lambda)q'$ est une forme quadratique positive.

De plus, $\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$ pour $x \in K$. Donc $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in \mathcal{A}$.

- \mathcal{A} est fermé :

Soit q_n une suite de \mathcal{A} convergeant vers q dans Q . On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n) \|x\|^2$, donc $q_n(x) \rightarrow q(x)$.

Comme pour tout n , pour tout x , $1 \geq q_n(x) \geq 0$, on a $1 \geq q(x) \geq 0$, donc $q \in \mathcal{A}$.

- \mathcal{A} est borné :

K est d'intérieur non vide³ donc il existe $a \in K$, $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset K$.

Soit $q \in \mathcal{A}$ et $x \in B(0, r)$, alors $q(a + x) \leq 1$.

On applique l'inégalité de Minkowski⁴ et on a $\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} = \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2$ d'où $q(B(0, r)) \leq 4$.

On en déduit $\forall x \in B(0, 1)$, $q(x) = q(rx) \frac{1}{r^2} \leq \frac{4}{r^2}$ et donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.

- \mathcal{A} est non vide :

K est borné donc inclus dans une boule $B(0, M)$. On pose $q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$. On a bien $q \in \mathcal{A}$ car $\forall x \in K$, $q(x) \leq 1$.

- Conclusion sur l'existence :

L'application D est continue (car le déterminant est continu) sur \mathcal{A} compact, donc D atteint son maximum en q_0 .

On a $D(x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}) > 0$ et c'est une forme quadratique dans \mathcal{A} , donc $D(q_0) > 0$, d'où $q_0 \in Q^{++}$.

On a donc existence d'un ellipsoïde de volume minimal contenant K .

- Unicité :

Soit $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Comme \mathcal{A} est convexe, $\frac{q+q_0}{2} \in \mathcal{A}$, or comme

1. On a l'impression que le calcul du volume V_q fait ici dépend du choix de la base \mathcal{B} , mais ce n'est pas le cas. Si on prend une autre base orthonormée, la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale, donc le jacobien du changement de variable correspondant est 1.

2. Les sup ou max de normes sont toujours de bons candidats de normes...

3. C'est ici qu'on l'utilise!!!

4. On a le droit de l'appliquer car on est sur Q^+ .

\det est strictement log-concave sur les matrices symétriques définies positives, on a $D(\frac{q+q_0}{2}) > \sqrt{D(q)}\sqrt{D(q_0)} \geq D(q_0)$, ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$. \square

Lemme (Log-concavité du déterminant sur \mathcal{S}_n^{++}).

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Si $A \neq B$, l'inégalité est stricte.

Démonstration. On utilise le théorème de pseudo-réduction simultanée⁵ pour écrire $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$.⁶

On a donc $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = \det P^{2\alpha} (\det D)^\beta$ et $\det(\alpha A + \beta B) = \det P^{2\alpha} (\det(\alpha I_n + \beta D))$.

On veut donc montrer $\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta$, soit $\prod(\alpha + \beta \lambda_i) \geq (\prod \lambda_i)^\beta$, soit $\sum \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \sum \ln(\lambda_i)$.

Or $\ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$ par concavité du logarithme. On a ainsi le résultat en sommant ces inégalités et en remontant le raisonnement.

Si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1 et on utilise la stricte concavité du log pour conclure. \square

Remarques : \rightarrow On peut déplacer le problème en n'importe quel point de l'espace. En effet, si on prend $a \in \mathbb{R}^n$ comme nouveau centre du repère de l'espace, on opère une translation de notre compact et il reste d'intérieur non vide. On applique notre théorème et on obtient un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K . On opère la translation inverse pour résoudre le problème. En effet, un ellipsoïde translaté reste un ellipsoïde.

\rightarrow On peut appliquer ce théorème sur n'importe quel espace vectoriel réel euclidien.

\rightarrow Application : FGN 3.38 : les sous-groupes compacts de $\text{GL}(E)$ maximaux pour l'inclusion sont les $O(q)$ où E est un espace vectoriel réel de dimension finie et $q \in Q^{++}$.

\rightarrow Si K est un triangle équilatéral dont un des sommets est l'origine, il faut savoir déterminer l'ellipsoïde correspondant. Celui-ci passe par deux points du triangle et cela le détermine entièrement. Si on appelle a le côté du triangle, on a l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec b tel que $\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$.

\rightarrow **Un prolongement du théorème :** on peut poser l'application φ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe le volume de \mathcal{E}_{q_x} avec q_x l'unique forme quadratique définissant l'ellipsoïde \mathcal{E}_{q_x} centré en x de volume minimal contenant K .

Si on prouve que φ est continue, et que hors d'un certain compact le volume devient grand (l'enveloppe convexe?), alors on aura montré qu'il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant K (et ceci sans fixer son centre).

5.

Théorème.

Si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si A est définie positive, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A P = I_n$ et ${}^t P B P$ soit diagonale.

6. On rappelle qu'on n'a pas diagonalisé A et B ! Les λ_i ne sont pas les valeurs propres de B . On a juste trouvé une base orthogonale commune pour deux produits scalaires.

II Exponentielle des matrices symétriques

Références : : Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*

Théorème.

L'application \exp réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration. • Montrons que l'image d'une matrice symétrique est une matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est orthodiagonalisable en base orthonormée. On dispose de $P \in O_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale réelle D telles que l'on ait : $A = PD^tP$. On a donc : $e^A = Pe^{D^t}P$. D'où il vient que $e^A = {}^t(e^A)$ et que les valeurs propres de e^A sont les exponentielles (réelles) des valeurs propres de A et sont donc réelles strictement positives. Ainsi e^A est bien symétrique définie positive.

- Surjectivité.

Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On dispose de $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait : $B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$,

avec les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels strictement positifs.

On définit la matrice A comme suit : $A := P \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} {}^tP$. De manière directe

on vérifie que $e^A = B$ et que A est une matrice symétrique.

- Injectivité.

Soit A et \hat{A} deux matrices symétriques réelles telles que l'on ait : $e^A = e^{\hat{A}}$. en particulier, e^A et $e^{\hat{A}}$ ont le même spectre. Or les éléments du spectre de e^A sont exactement les exponentielles des éléments de spectre de A . Et il en est de même pour \hat{A} . Ainsi A et \hat{A} ont le même spectre. On note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ce spectre. Soit Π un polynôme interpolateur tel que l'on ait : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Pi(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.

On a alors $A = \Pi(e^A) = \Pi(e^{\hat{A}}) = \hat{A}$.

- Continuité.

La série $\sum \frac{1}{k!} A^k$ converge normalement donc uniformément sur toute boule $B(0, R)$ pour une norme sous-multiplicative. Donc \exp est continue sur $B(0, R)$. Elle est donc continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.⁷

- Bicontinuité.

Soit une suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par bijectivité de l'exponentielle, on dispose d'une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que l'on ait pour tout p entier $B_p = e^{A_p}$ et $B = e^A$. Le but est de montrer que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers A . on aura donc prouvé la continuité séquentielle de l'inverse de l'exponentielle, et donc sa continuité.

La suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers B donc en particulier la norme 2 de B_p converge vers celle de B . Donc la plus grande valeur propre de B_p converge vers la plus grande valeur propre de B .

7. En réalité elle est même analytique.

B . En faisant le même raisonnement avec la suite (B_p^{-1}) , la plus petite valeur propre de B_p converge vers la plus petite valeur propre de B ⁸. Nécessairement les valeurs propres des B_p sont contenues dans un compact de \mathbb{R}^{+*} . Les valeurs propres des A_p étant les logarithmes (réels) des valeurs propres des B_p , elles sont aussi contenues dans un compact de \mathbb{R} .⁹

Pour tout entier p , on dispose de $Q_p \in O_n(\mathbb{R})$ et D_p une matrice diagonale telles que l'on ait : $A_p = Q_p D_p {}^t Q_p$. Les suites $(D_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(Q_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont dans des compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite dans un compact. Elle admet donc des valeurs d'adhérence. Soit φ une extractrice telle que $A_{\varphi(p)} \rightarrow \tilde{A}$. Par continuité de l'exponentielle, on a : $e^{\tilde{A}} = e^A$. Par injectivité de l'exponentielle, $\tilde{A} = A$. Ainsi $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite dans un compact, qui admet une unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers cette valeur d'adhérence. $A_p \rightarrow A$. Donc l'exponentielle est bien bicontinue.

Ainsi $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise bien un homéomorphisme. □

8. Les B_p sont inversibles car dans \mathcal{S}_n^{++} , et l'inverse est une application continue par la formule $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t \text{com}(B)$.

9. La démonstration du MT est plus complexe : la suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers B donc la suite de polynôme caractéristique $(\chi_{B_p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers χ_B . En effet on a continuité de la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ M &\mapsto \det(M - XI_n) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rouché ([MT] chap 2, exo 18), les valeurs propres de B_p convergent vers les valeurs propres de B . Ainsi les valeurs propres des B_p sont contenues dans un compact de \mathbb{R}^{+*} .

III Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Références : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*

On considère ici la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur E . On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire de dimension finie (notée n ici).

Théorème.

Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E), \|u\| \leq 1\}$, alors les points extrémaux de B sont les éléments de $O(E)$.

On rappelle qu'un point extrémal u de B est un point tel que $B \setminus \{u\}$ est convexe. Sur un dessin, on voit que les points extrémaux de la boule unité de \mathbb{R}^2 sont les points du cercle.

Démonstration. Soit $u \in O(E)$, comme $\|O(E)\| = \{1\}$, on a bien $u \in B$.

Supposons que $u = \frac{1}{2}(v+w)$ avec $v, w \in B$. Si on montre que cela implique $v = w$, on aura fini. En effet, si $B \setminus \{u\}$ n'était pas convexe, on pourrait trouver un segment $[v, w]$ contenant u et dont les bords sont dans $B \setminus \{u\}$. Quitte à découper notre segment, on peut se ramener au cas où u est au milieu du segment, c'est à dire $u = \frac{1}{2}(v+w)$. Donc si on prouve que $v = w = u$, on aura une absurdité.

Soit x de norme 1, alors $1 = \|x\| = \|u(x)\| \leq \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \leq \frac{1}{2}(\|v\| + \|w\|) \leq 1$.

On a donc égalité! En particulier, pour tout x unitaire, $\|v(x) + w(x)\| = \|v(x)\| + \|w(x)\|$. Donc $v(x) = \lambda_x w(x)$ avec $\lambda_x > 0$ ¹⁰. Or $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$ donc $\lambda_x = 1$.

$v(x) = w(x)$ pour tout x unitaire donc par linéarité, $v = w$ et u est bien un point extrémal de B .

Réciproquement, soit $u \in B$ tel que $u \notin O(E)$. Montrons que u n'est pas extrémal.

On note A la matrice de u dans une base orthonormée de E . En utilisant la décomposition polaire (sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on peut écrire $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

En utilisant le théorème de réduction des matrices symétriques, on a $S = PD^tP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n$.

De plus, $\|A\| = \|OS\| = \|S\| = \sqrt{d_n^2} = d_n$ ¹¹ et $u \in B$ donc $\|A\| \leq 1$. Donc $\forall i, d_i \in [0, 1]$.

Par hypothèse, A n'est pas orthogonale, donc $S \neq I_n$, donc $d_1 < 1$. On peut donc écrire $d_1 = \frac{a+b}{2}$ où $-1 \leq a < b \leq 1$ (on prend $a \geq -1$ et pas $a \geq 0$ pour le cas où $d_1 = 0$).

On pose alors $D_1 = \text{Diag}(a, d_2, \dots, d_n)$ et $D_2 = \text{Diag}(b, d_2, \dots, d_n)$.

On a $D_1 \neq D_2$ et $A = \frac{1}{2}(OPD_1^tP + OPD_2^tP)$.

Ici on est plutôt content, on a écrit A comme le milieu d'un segment. Néanmoins, il faut encore montrer que les bornes de ce segment sont dans B .

Soit X de norme 1, alors $\|OPD_i^tPX\|^2 = {}^tXPD_i^tP^tOOPD_i^tPX = {}^t(PX)D_i^2(PX)$.

Or $\|PX\| = 1$ car P est orthogonale et X est unitaire.

En notant $Y = PX$, on a ${}^tYD_i^2Y = \sum_{j=2}^n d_j^2 y_j^2 + d_i^0 y_1^2$ avec $d_i^0 = a^2$ si $i = 1$ et b^2 si $i = 2$.

De plus, les coefficients de D_i^2 sont tous compris entre 0 et 1, donc ${}^tYD_i^2Y \leq \sum_{j=1}^n y_j^2 = 1$. On en déduit que OPD_1^tPX et OPD_2^tPX sont dans B .

10. En effet, on a $\|v(x) + w(x)\|^2 = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2\|v(x)\|\|w(x)\| = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2(v, w)$. Donc $(v, w) = \|v(x)\|\|w(x)\|$. L'égalité dans Cauchy-Schwarz donne que $v(x) = \lambda_x w(x)$.

Puis $\|w(x)\|^2 \lambda_x = (v, w) = \|v(x)\|\|w(x)\| \in \mathbb{R}^+$, donc λ_x est positif.

11. On rappelle que sur les matrices, la norme 2 donne $\|M\| = \sqrt{\rho({}^tMM)}$ où ρ est le rayon spectral, c'est à dire la valeur propre maximale.

Donc $A = \frac{1}{2}(OPD_1^tP + OPD_2^tP)$ est le milieu de deux éléments distincts de B . Donc A n'est pas un point extrémal! \square

Remarques :

- Un théorème de Krein-Milman affirme qu'un convexe compact de \mathbb{R}^n est toujours l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux (voir FGN analyse 3). Donc ici, la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ est l'enveloppe convexe de $O(E)$.
- En dimension 1, le résultat est simple. En effet, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à \mathbb{R} et B au segment $[-1, 1]$. D'autre part, $O(E)$ n'est constitué que de $\pm I_1$ soit 1 et -1 .
- En dimension 2, $O(E)$ s'identifie à deux cercles disjoints : l'un représentant l'ensemble des angles des rotations de $SO(E)$ et l'autre représentant l'ensemble des angles des axes de symétries de $O(E) \setminus SO(E)$. B s'identifie donc à un compact convexe de dimension 4 tel que ses points extrémaux soient deux cercles.

On peut préciser cette vision. En effet, si $A \in SO_2$ alors $-A \in SO_2$. Il en va de même pour l'autre composante connexe. Donc les cercles sont centrés autour de 0.

On peut ensuite projeter en dimension 3 pour obtenir que la boule unité est un double cône (deux cônes collés par leur base circulaire) dont la hauteur évolue de 0 à 1 (et de manière symétrique sur celui du bas). On peut faire de jolis dessins de ces doubles toupies évolutives pour "voir" la boule.

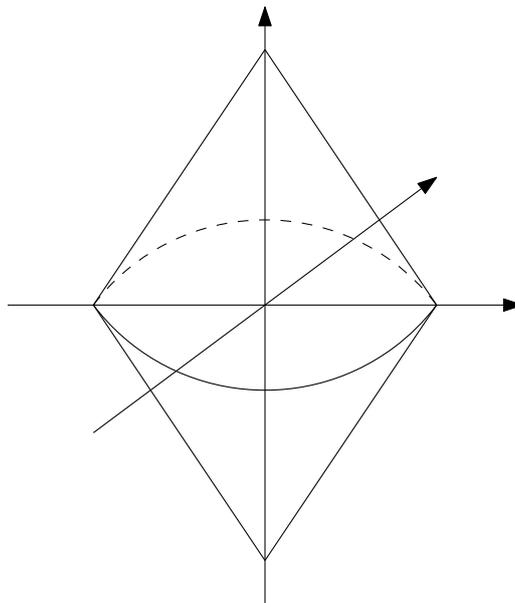


FIGURE 2.2 – La double toupie.

IV $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*

On va commencer par prouver quelques propriétés sur $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ que l'on utilisera dans la suite pour prouver la simplicité de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. On conclura sur l'éventuelle simplicité des autres groupes spéciaux orthogonaux.

Théorème.

$\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe (par arcs).

Démonstration. 1) On définit l'application ϕ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe tMM . Elle est continue car chacune des composantes est un polynôme en les coefficients de la matrice en entrée. Donc $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}\{I_n\} \cap \det^{-1}\{1\}$ est fermé.

D'autre part, on prend la norme liée au produit scalaire $(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$ sur l'espace des matrices et on remarque que $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{n}$ pour $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. Donc $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est borné (pour toute norme car elles sont équivalentes).

Comme on est en dimension finie, $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Continuons avec la connexité. Soit $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, on va créer un chemin continu liant M à I_n . Ainsi on pourra relier deux matrices par un chemin continu en passant par l'identité. Le théorème de réduction donne l'existence d'une matrice $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & & & & & \\ & -I_{2p} & & & & \\ & & R_{\theta_1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & R_{\theta_s} & \end{pmatrix} {}^tP \text{ avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose alors pour } t \in [0, 1], N(t) = \begin{pmatrix} I_r & & & & & \\ & R_{t\pi} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R_{t\pi} & & \\ & & & & R_{t\theta_1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\gamma(t) := PN(t){}^tP$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ qui relie M à I_n . \square

On peut maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème.

$\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Démonstration. Soit $H \triangleleft \text{SO}_3(\mathbb{R})$ non trivial, il nous faut montrer que $H = \text{SO}_3(\mathbb{R})$. On admet que les retournements engendrent $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Ceux-ci sont conjugués dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ (donc l'ensemble des retournements est stable par automorphisme intérieur). On en déduit que si H contient un retournement, comme il est distingué, il les contient tous et donc $H = \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi les retournements sont-ils conjugués ?

Soient r_D et $r_{D'}$ deux retournements de droites respectives D et D' . On choisit d et d' deux vecteurs unitaires engendrant chacun leur droite associée. On peut ensuite trouver une base orthonormée de $D^\perp : (e_1, e_2)$ (et de même on peut trouver (e'_1, e'_2) base de D'^\perp). Finalement on obtient deux bases orthonormées (d, e_1, e_2) et (d', e'_1, e'_2) . La matrice de passage de l'une à l'autre est donc orthogonale. Quitte à poser $d'' = -d'$, on a une matrice de passage de déterminant 1, donc dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi H contient-il un retournement ?

Soit $h \in H$ non trivial, on pose $\phi : \begin{array}{ccc} \text{SO}_3(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \text{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$.

- $\phi(I_3) = 3$ donc $3 \in \text{Im}(\phi)$,
- $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe donc $\phi(\text{SO}_3(\mathbb{R}))$ est un intervalle contenant 3,
- $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact donc $\phi(\text{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, b]$ avec $a \leq 3 \leq b$,
- la trace d'un élément de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2 \cos(\theta)$, donc $\phi(\text{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ avec $a \in [-1, 3]$.

Supposons que $a = 3$, alors $\forall g \in \text{SO}_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (le théorème de réduction donne qu'il y a une unique matrice de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ de trace 3). Donc $h \in Z(\text{SO}_3(\mathbb{R}) = I_3$ ¹²). C'est absurde !

Donc $a < 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2 \cos(\frac{\pi}{n}) < 3$ (car $3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \cos(\frac{\pi}{n})$). On note g_n tel que $\phi(g_n) = 1 + 2 \cos(\frac{\pi}{n})$. Alors $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1} \in H$ (car $h^{-1} \in H$ et $g_n h g_n^{-1} \in H$ car H est distingué) et est une rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{n}$.

Donc h_n^n est dans H et est une rotation d'angle π , donc un retournement. □

Remarque : qu'en est-il des autres groupes spéciaux orthogonaux ?

Si n est pair, $\langle \pm I_n \rangle \triangleleft \text{SO}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple. On pose ainsi naturellement

les groupes $\text{PSO}_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \text{SO}_n(\mathbb{R}) / \langle \pm I_n \rangle & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{SO}_n(\mathbb{R}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

On peut alors montrer (mais c'est difficile) que $\text{PSO}_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n = 3$ et $n \geq 5$. C'est faux pour $n = 4$ car $\text{PSO}_4(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R}) \times \text{SO}_3(\mathbb{R})$ (en le faisant agir sur les quaternions, fait dans [2]). Pour $n = 2$, $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien donc $\text{PSO}_2(\mathbb{R})$ aussi ; en particulier, il n'est pas simple.

12. En effet, soit $u \in Z(\text{SO}_3(\mathbb{R}))$, alors pour toute droite D de l'espace, si on note r_D le retournement de droite D , on a $r_D = u r_D u^{-1} = r_{u(D)}$. On en déduit $D = u(D)$ pour toute droite D de l'espace. C'est un exo de sup classique de montrer qu'alors, u est une homothétie. Il n'y a qu'une homothétie dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est l'identité.

Cas 2 : u n'a aucune valeur propre réelle.

Soit $Q = X^2 + \alpha X + \beta$ un diviseur irréductible de χ_u , on pose $N = \ker(Q(u))$.

- On a $N \neq \{0\}$. En effet, $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$. Donc comme λ est une valeur propre complexe de u , on a $\det(u - \lambda id) = 0$. D'où il vient $\det(Q(u)) = 0$. Donc $N \neq \{0\}$.

- Soit $x \in N$, on pose $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(x, u(x))$. Comme u n'a pas de valeurs propres réelles, $\dim(F) = 2$. De plus, F est stable par u car $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = -\alpha u(x) - \beta x \in F$ car $x \in N = \text{Ker}(Q(u))$.

On peut donc définir $u|_F$ et c'est un endomorphisme normal.

- On se donne une base orthonormale \mathcal{B}_1 de F . On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $u|_F$ dans cette base.

La condition $u|_F$ normal implique $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ et $ab + cd = ac + bd$. Donc $b = \pm c$. Or si $b = c$, la matrice est symétrique et donc diagonalisable, ce qui est proscrit car u n'a pas de valeurs propres réelles. Donc $b = -c$.

La deuxième égalité donne $(a - d)b = 0$. Si $b = 0$, la matrice est symétrique. Donc $b \neq 0$ et $a = d$. La matrice de $u|_F$ est donc de la forme $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- Conclusion :

On prend une base orthonormée \mathcal{B}_2 mettant $u|_{F^\perp}$ sous la forme voulue. Puis en concaténant \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 , on obtient une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est sous la forme demandée.

Ainsi la récurrence est prouvée. □

Remarque : • On peut appliquer ce théorème pour prouver les théorèmes de réduction des matrices orthogonales, antisymétriques et symétriques (théorème spectral). On en applique deux d'un coup juste après!

Et maintenant, une petite application sympa dont on fait la démonstration rapidement si on a le temps (on passe la première étape de la démo déjà).

Corollaire 38.

La fonction exponentielle $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Démonstration. • Pour montrer qu'elle est définie, prenons $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t \exp(A) = \exp({}^t A) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, donc $\exp(A) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

Puis $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ avec $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ (quitte

à mettre des blocs R_π pour le nombre pair de -1.

Alors on a $M = \exp(B)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \theta_1 J & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \theta_s J \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit maintenant d'observer la compatibilité de l'exponentielle avec le changement de base pour conclure. \square

Remarque : on voit alors que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie associé au groupe de Lie $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Questions

→ Quelles sont les classes de conjugaisons de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$?

• Soit (u, θ) un vecteur directeur (dans \mathbb{S}^2) et un angle (dans \mathbb{S}^1) pour la rotation choisie dans le sens direct ; cela définit entièrement un élément de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

On se donne v un autre vecteur de \mathbb{S}^2 . Soit w_1, w'_1 deux vecteurs de $\text{Vect}(u)^\perp$ tels que $\mathcal{B}_1 = (u, w_1, w'_1)$ forme une base orthonormée. On se donne de même une base $\mathcal{B}_2 = (v, w_2, w'_2)$ correspondant à l'autre vecteur. On note P la matrice de passage d'une base à l'autre. Elle est dans $\text{O}_3(\mathbb{R})$ mais quitte à changer w_2 en $-w_2$, on peut la prendre dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

On peut donc envoyer par conjugaison tout (u, θ) sur (v, θ) , $v \in \mathbb{S}^2$.

• Montrons maintenant que θ est un élément invariant par conjugaison.

On sait que si on peut atteindre θ' par conjugaison alors $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ en utilisant la trace, donc $\theta' = \pm\theta$.

Montrons que (u, θ) et $(u, -\theta)$ ne sont pas conjugués (sauf dans les cas triviaux). On aura alors fini.

Cela revient à dire que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et tM sont conjugués. Cela revient à dire

que $N = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et tN sont conjuguées dans $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. Un calcul direct montre que ça n'arrive que dans les cas triviaux.

• Pour finir, on remarque que (u, θ) est la même rotation que $(-u, -\theta)$.

• Conclusion : on pose \sim la relation antipodale, c'est à dire $(u, \theta) \sim (-u, -\theta)$.

Alors les classes de conjugaison sont les $\{(u, \theta), u \in \mathbb{S}^2\} / \sim$.

Elles sont en bijection avec les angles de rotation modulo l'orientation du repère, donc avec $\mathbb{R}/(2\pi)\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$.

→ Soit $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, $A \neq I_3$, on note u_0 un vecteur normé dirigeant sa droite propre et u un vecteur normé orthogonal à u_0 . On réduit A dans une base du type $\mathcal{B} = (u_0, x, y)$ telle que

$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$. On écrit $u = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ dans cette base \mathcal{B} avec $a^2 + b^2 = 1$.

Alors $\det \left(u_0, u, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} u \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ 0 & b & a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix} = \sin(\theta)$.

Comme le déterminant est indépendant de la base choisie, on a toujours $\det(u_0, u, Au) = \sin(\theta)$.

Bibliographie

- [1] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [2] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet, 2013.
- [3] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-ENS : Algèbre 3*. Cassini, 2013.
- [4] X. Gourdon. *Les maths en tête : Algèbre*. Ellipses, 2009.
- [5] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès Éditions, 1990.
- [6] R. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.
- [7] P. Tauvel. *Algèbre*. Dunod, 2005.