Théorèmes de Schauder et de Cauchy-Arzela-Peano

Références : Chambert-Loir, *Analyse 1*, p 79

Théorème.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide. Soit $f : C \to C$ une application continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact dans E.
Alors f admet un point fixe.

La preuve utilise le lemme suivant, un théorème de point fixe en dimension finie s'appuyant sur le théorème de Brouwer. On le prouvera en remarque.

Lemme.

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ un convexe compact non vide. Soit $f : C \to C$ une application continue.
Alors f admet un point fixe.

Passons à présent à la preuve du théorème de point fixe de Schauder.

Démonstration. Comme C est fermé et $f(C) \subset C$ relativement compact, $\overline{f(C)}$ est un compact de C. On va utiliser la propriété de Borel Lebesgue pour se ramener à un convexe de dimension fini et utiliser notre lemme.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $c_1, ..., c_m \in C$ tels que $\overline{f(C)} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^m B(c_i, \frac{1}{n})$. On considère $E_n = \mathrm{Vect}(c_1, ..., c_m)$ et $C_n = \mathrm{Conv}(c_1, ..., c_m)$. En dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte [1], donc C_n est compact dans E_n qui est de dimension finie.
On va pouvoir appliquer notre lemme à la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f_n &: C_n \to C_n \\ &: x \mapsto \sum_{i=1}^m \frac{\max(0,\ \frac{1}{n} - ||f(x) - c_i||)}{\sum_{j=1}^m \max(0,\ \frac{1}{n} - ||f(x) - c_j||)} c_i \end{aligned}$$

Par le recouvrement de $f(C_n) \subset \overline{f(C)}$, on a que le dénominateur ne s'annule pas sur C_n, de sorte que f_n est bien continue. Par le lemme il existe donc $x_n \in C_n$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.

Montrons pour conclure que f_n vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in C_n,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit donc $x \in C_n$. Comme $f(x) \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^m B\left(c_i, \frac{1}{n}\right)$ on pose $I = \{i \in \{1, ..., m\},\ f(x) \in B\left(c_i, \frac{1}{n}\right)\}$ et pour $i \in I$ on

1. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$, espace affine de dimension finie n. Le théorème de Carathéodory donne que tout point de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de $\mathcal{A}$.
On pose K l'ensemble des $n+1$-uplets de $[0,1]^{n+1}$ dont la somme fait 1. K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On pose

$$f : \begin{array}{ccc} K \times \mathcal{E}^{n+1} & \to & \mathcal{E} \\ ((t_0, ..., t_n), (A_0, ..., A_n)) & \mapsto & t_0 A_0 + ... t_n A_n \end{array},$$

alors f est continue et comme $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) = f(K \times \mathcal{A}^{n+1})$, $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est compact.

prend $y_i \in B(0,1)$ tel que $f(x) = c_i + \frac{1}{n} y_i$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{i \in I} \frac{\frac{1}{n} - ||f(x) - c_i||}{\sum_{j \in I}(\frac{1}{n} - ||f(x) - c_j||)} c_i - f(x) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i \in I} \frac{\frac{1}{n} - ||\frac{1}{n} y_i||}{\sum_{j \in I}(\frac{1}{n} - ||\frac{1}{n} y_j||)} (c_i - f(x)) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i \in I} \frac{1 - ||y_i||}{\sum_{j \in I}(1 - ||y_j||)} \frac{1}{n} y_i \right\| \\
&\leqslant \sum_{i \in I} \frac{1 - ||y_i||}{\sum_{j \in I}(1 - ||y_j||)} \frac{1}{n} ||y_i|| \\
&\leqslant \frac{\sum_{i \in I}(1 - ||y_i||)}{\sum_{j \in I}(1 - ||y_j||)} \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

On peut maintenant mener le raisonnement suivant : comme $f(C)$ est relativement compact dans C, il existe une extractrice φ et $c \in C$ tels que $f(x_{\varphi(n)}) \to c$. Alors

$$\begin{aligned}
||f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - c|| &\leqslant ||f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})|| + ||f(x_{\varphi(n)}) - c|| \\
&\leqslant \frac{1}{\varphi(n)} + ||f(x_{\varphi(n)}) - c|| \to 0
\end{aligned}$$

donc $x_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \to c$. Or f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$. Comme on a déjà $f(x_{\varphi(n)}) \to c$, on en déduit que $f(c) = c$ ce qu'il fallait démontrer. □

L'application phare du théorème de Schauder est le théorème de Cauchy-Arzela-Peano.

Théorème.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème suivant admet au moins une solution y de classe $\mathbb{C}^1$ définie sur un certain intervalle dans I de la forme $[t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T > 0$.

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Démonstration. • Cylindre de sécurité
Comme I et Ω sont ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$.
C_0 est compact donc f est bornée sur C_0 par une constante M.
Soit $T \leqslant T_0$, et y une solution du problème définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ au temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors, par continuité,

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) \mathrm{d}u \right\| \leqslant TM.$$

Donc si $T \leqslant \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.
On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$.

• Application de Schauder
On note $E = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \mathbb{R}^n)$ et $C = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$. Alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et C est un convexe fermé non vide.
Pour $y \in C$, on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) \mathrm{d}u.$$

Par convergence dominée, ϕ est continue, puis comme $MT \leqslant r_0$, on a $\phi : C \to C$.

Supposons que $\phi(C)$ est relativement compacte, alors par le théorème de Schauder, on a existence d'un point fixe dans C de ϕ, c'est à dire une solution à notre équation différentielle définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

- $\phi(C)$ est relativement compacte

$[t_0 - T, t_0 + T]$ est compact.
$\phi(C)$ est bornée par r_0 en norme infinie.
Puis si $y \in C$ et t_1, $t_2 \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors

$$\|\phi(y)(t_1) - \phi(y)(t_2)\| = \left\| \int_{t_2}^{t_1} f(u, y(u))\mathrm{d}u \right\| \leqslant M\,|t_1 - t_2|\,.$$

On en déduit que les fonctions de $\phi(C)$ sont M-lipschitziennes sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, donc forment une famille équicontinue.
Le théorème d'Ascoli permet alors de dire que $\phi(C)$ est relativement compacte. □

Remarques : • L'exemple classique d'application de Cauchy-Peano est le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y\,(0) = 0 \end{array} \right.$$

On trouve à ce problème une infinité de solutions de la forme $y(t) = \dfrac{(t - t_0)^2}{4}\mathbb{1}_{[t_0, +\infty[}(t)$.
• Voici à présent la preuve du lemme.

Démonstration. La preuve consiste à construire un homéomorphisme entre C et la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ pour un certain d, le théorème de Brouwer permet alors de conclure.
Tout d'abord, on se ramène au cas où $0 \in \mathring{C}$ de la manière suivante :

- Si $\mathring{C} \neq \varnothing$, soit $c \in \mathring{C}$, alors $C' = C - c$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, $f' : x \mapsto f(x + c) - c$ est une application continue de C' dans lui-même, et l'existence d'un point fixe de f équivaut à l'existence d'un point fixe de f'.
- Si $\mathring{C} = \varnothing$, alors il existe un hyperplan affine de E contenant C. En effet, raisonnons par contraposée et montrons que si C contient $(n + 1)$ points affinement indépendants alors C est d'intérieur non vide.
  Soient $c_0, ..., c_n \in C$ des points affinement indépendants ; alors $(c_1 - c_0, ..., c_n - c_0)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. Notant $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme envoyant e_i sur $c_i - c_0$ pour tout i, l'application affine $F : x \mapsto c_0 + \varphi(x)$ réalise un homéomorphisme [2] de $\Delta = \mathrm{Conv}(e_0, e_1, ..., e_n)$ sur $V = \mathrm{Conv}(c_0, ..., c_n)$ où l'on a noté $e_0 = 0$ et $\mathrm{Conv}(x_0, ..., x_n)$ l'enveloppe convexe de $\{x_0, ..., x_n\}$. Reste à voir que Δ est d'intérieur non vide ; comme on est en dimension finie, on dispose de l'équivalence des normes, on montre donc ici que Δ contient une boule pour la norme infinie. Rappelons que, puisque $e_0 = 0$ on a $\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant 1 \right\}$. On pose $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i$ pour un $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{3n\lambda}{2} \leqslant 1$. Alors $B = B_{||.||_\infty}\left(x, \dfrac{\lambda}{2}\right) \subset \Delta$. En effet, si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in B$ alors pour tout i, $|\lambda - y_i| < \dfrac{\lambda}{2}$ donc $y_i \in \left]\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{3\lambda}{2}\right[$ donc $y_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \dfrac{3n\lambda}{2} \leqslant 1$ donc $y \in \Delta$.
  On considère alors C comme un convexe de $\mathbb{R}^{n-1}$. Par récurrence sur la dimension, initialisée à 0, dimension pour laquelle C est un singleton et le théorème acquis, on peut donc supposer C d'intérieur non vide.

On suppose donc que $0 \in \mathring{C}$. Cela implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset C$. Par ailleurs, comme C est compact il existe $M > 0$ tel que $C \subset B(0, M)$. On considère alors l'application suivante, dite jauge de C :

$$\begin{array}{rl} \rho : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^+ \\ : \ x & \mapsto \inf\{t \geqslant 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

Montrons quelques propriétés de ρ :

2. Voir Chambert-Loir

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \in C \Leftrightarrow \rho(x) \leqslant 1$.
   L'implication directe est claire. Pour l'autre, il faut distinguer deux cas :
   Si $\rho(x) < 1$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $x \in tC$, donc il existe $c \in C$ tel que $x = tC$. Ainsi $x = (1-t)0 + tc \in C$.
   Si $\rho(x) = 1$, on prend une suite t_n tendant vers 1 telle que $x = t_n c_n$ avec $c_n \in C$. C est compact donc on peut supposer que c_n converge (vers $c \in C$). Alors en passant à la limite, on obtient $x = c \in C$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$.
   En effet, c'est clair pour $\lambda = 0$, et pour $\lambda > 0$ cela résulte de ce que pour tout $t \geqslant 0$: $\lambda x \in tC \Leftrightarrow x \in \dfrac{t}{\lambda}C$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \dfrac{||x||}{M} \leqslant \rho(x) \leqslant \dfrac{||x||}{\varepsilon}$. En particulier $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \dfrac{x}{||x||} \in B(0,\varepsilon) \subset C$ donc $x \in \dfrac{||x||}{\varepsilon}C$ donc $\rho(x) \leqslant \dfrac{||x||}{\varepsilon}$.
   Puis pour tout $t \geqslant \rho(x)$ tel que $x \in tC$ on a $\dfrac{x}{t} \in C \subset B(0,M)$ donc $\dfrac{||x||}{t} < M$ donc $\dfrac{||x||}{M} < t$, ainsi : $\dfrac{||x||}{M} \leqslant \rho(x)$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}^n,\ |\rho(a) - \rho(b)| \leqslant \rho(a-b)$. En particulier, avec 3, ρ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
   En effet, pour $x = 0$ ou $y = 0$ le résultat est clair, supposons $\rho(x) > 0$ et $\rho(y) > 0$. Pour tous $t, s > 0$ tels que $x \in tC$ et $y \in sC$ on a $x = tc_x$, $y = sc_y$ avec $c_x, c_y \in C$; comme C est convexe, on a $\dfrac{tc_x + sc_y}{t+s} \in C$ donc $x + y \in (t+s)C$. Passant à la borne inférieure on obtient bien $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.
   Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Supposons $\rho(a) \geqslant \rho(b)$, alors avec $x = a - b$ et $y = b$ l'inégalité précédente donne $|\rho(a) - \rho(b)| = \rho(a) - \rho(b) \leqslant \rho(a-b)$. Le même raisonnement avec $x = a - b$ et $y = a$ quand $\rho(a) \leqslant \rho(b)$ donne finalement le résultat.

On construit alors un homéomorphisme ϕ entre C et $B = \overline{B}(0,1)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi &: C \to B \\ &: x \mapsto \rho(x)\frac{x}{||x||} \text{ si } x \neq 0, \text{ 0 sinon} \end{aligned}$$

Définissons aussi la fonction ψ, qui sera l'inverse de ϕ :

$$\begin{aligned} \psi &: B \to C \\ &: x \mapsto ||x||\frac{x}{\rho(x)} \text{ si } x \neq 0, \text{ 0 sinon} \end{aligned}$$

Par la propriété 1, ϕ et ψ sont bien à valeurs dans B et C respectivement. Comme ρ est continue et ne s'annule qu'en 0, ϕ et ψ sont continues sur $C\backslash\{0\}$ et $B\backslash\{0\}$ et ne s'annulent qu'en 0. Les inégalités de 3 montrent que ϕ et ψ sont continues en 0. Enfin, la propriété 3 permet d'écrire pour tout $x \in C\backslash\{0\}$ et tout $y \in B\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} \psi(\phi(x)) &= ||\phi(x)||\frac{\phi(x)}{\rho(\phi(x))} = \rho(x)\frac{\rho(x)||x||x}{||x||\rho(x)^2} = x \\ \text{et } \phi(\psi(y)) &= \rho(\psi(y))\frac{\psi(y)}{||\psi(y)||} = ||y||\frac{||y||\rho(y)y}{\rho(y)||y||^2} = y \end{aligned}$$

Ainsi ϕ est bien un homéomorphisme de C dans B d'inverse ψ. On peut donc appliquer le théorème de Brouwer à la fonction continue $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : B \to B$: elle admet un point fixe $x_0 \in B$, et $\phi^{-1}(x_0) \in C$ est un point fixe de f. □

Adapté du travail de Corentin Caillaud et Karine Beauchard