Théorème central limite

Références : Ouvrard, *Probabilités 2*, p323

Théorème (Théorème central limite)**.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. *iid* de carré intégrable. On note $m = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X)$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme des X_n. On a alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad .$$

Quitte à recentrer et réduire les variables, on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. La démonstration va utiliser le théorème de Paul Lévy. On note φ_n la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et on va montrer que la suite $(\varphi_n)_n$ converge vers la fonction caractéristique de la loi normale.

• **Étape 1 :** Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes de modules inférieurs à 1, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \quad .$$

Le résultat est évident pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| &\leqslant \left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i\right| + \left|a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| \\
&\leqslant |a_{n+1}|\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + \left|\prod_{i=1}^{n} b_i\right| |a_{n+1} - b_{n+1}| \\
&\leqslant \left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + |a_{n+1} - b_{n+1}|
\end{aligned}$$

Par récurrence on a le résultat. [1]

• **Étape 2 :** Soit X une v.a. $\mathbb{L}^2$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\varphi_X(t) - \left(1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2]\right)\right| \leqslant t^2\mathbb{E}\left[\min\left(X^2, |t|\frac{|X^3|}{6}\right)\right] \quad .$$

D'après la formule de *Taylor-Laplace* à l'ordre 1, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - x^2\int_0^1 (1-u)e^{iux}\mathrm{d}u \\
e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right) &= -x^2\int_0^1 (1-u)[e^{iux} - 1]\mathrm{d}u \\
\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| &\leqslant x^2
\end{aligned}$$

De même, en poussant la formule à l'ordre 2, pour tout réel x, on a :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-u)^2 e^{iux}\mathrm{d}u$$

1. pas de référence, c'est à connaître par ♡ . . .

$$\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|x^3|}{6}$$

On a donc la majoration suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \min\left(x^2, \frac{|x^3|}{6}\right)$. On obtient le résultat en appliquant cette inégalité à tX et on effectue l'inégalité de Jensen ($x \mapsto |x|$ est convexe).

• **Étape 3 :** Application à φ_n.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\varphi_n(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$, par propriétés sur les fonctions caractéristiques (somme de v.a. indépendante et multiplication par une constante). D'après les deux étapes précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| &= \left|\left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \\
&\leqslant n\left|\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\right| \\
&\leqslant n\frac{t^2}{n}\mathbb{E}\left[\min\left(X^2, \frac{|t|}{6\sqrt{n}}|X^3|\right)\right]
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée (dont les hypothèses sont vérifiées) on a :

$$\left|\varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

En outre, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad .$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad .$$

Le théorème de Paul Lévy permet de conclure.

Adapté du travail de Baptiste Huguet.