Quelques ordres moyens

Références : Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, p 40-41

Un ordre moyen d'une fonction arithmétique $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (une suite numérique donc) toute fonction élémentaire de variable réelle g telle que

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} f(n) \sim \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} g(n).$$

On va chercher quelques développements asymptotiques de ces sommes partielles et en déduire des ordres moyens.
On étudiera les fonctions

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \text{ et } \varphi(n).$$

Dans toute la suite, quand cela s'avérera nécessaire, on notera $\mathcal{O}_u$ un $\mathcal{O}$ uniforme en x. Ainsi on pourra permuter sommations et $\mathcal{O}$.

Théorème.

Un ordre moyen de σ est $x \mapsto \frac{\pi^2}{12}x$ et on a

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + \mathcal{O}(x \ln(x)).$$

Démonstration. On réécrit les sommations pour commencer.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} d \\
&= \sum_{dm \leqslant x} d \\
&= \sum_{m \leqslant x} \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m \leqslant x} \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \sum_{m \leqslant x} \frac{x}{m} \mathcal{O}_u(1) + \sum_{m \leqslant x} \mathcal{O}_u(1) \\
&= \frac{x^2}{2} \sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m^2} + \mathcal{O}(x) \sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} + \mathcal{O}(x)
\end{aligned}$$

Lemme.

On a

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} = \ln(x) + \mathcal{O}(1).$$

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$, alors

$$\int_m^{m+1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{m^2} \leqslant \int_{m-1}^{m} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Donc

$$\int_{\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} \leqslant \sum_{m > x} \frac{1}{m^2} \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}.$$

Il vient

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)=\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis le développement de la série harmonique donne

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m}=\ln(\lfloor x\rfloor)+\mathcal{O}(1)=\ln(\lfloor x\rfloor)+\mathcal{O}(1).$$

Or

$$\ln(\lfloor x\rfloor)=\ln(x+\mathcal{O}_u(1))=\ln(x)+\ln\left(1+\mathcal{O}_u\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\ln(x)+\mathcal{O}_u\left(\frac{1}{x}\right)=\ln(x)+\mathcal{O}(1)$$

d'où le résultat. □

On a alors

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)=\frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\mathcal{O}(x\ln(x))=\frac{\pi^2}{12}x^2+\mathcal{O}(x\ln(x)).$$

□

Théorème.

Un ordre moyen de φ est $x\mapsto\frac{\pi^2}{3}x$ et on a

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+\mathcal{O}(x\ln(x)).$$

Démonstration. On utilise la formule d'inversion de Moëbius appliquée à $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$, cela donne

$$\varphi(n)=\sum_{md=n}\mu(d)m.$$

Les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)&=\sum_{n\leqslant x}\sum_{md=n}\mu(d)m\\&=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}}m\\&=\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{2}\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1\right)\\&=\frac{x^2}{2}\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}+\mathcal{O}(x\ln(x)).\end{aligned}$$

La question est : que vaut $\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}$?

La somme $\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2}$ converge absolument, ainsi que $\sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d^2}$, et on a

$$\left(\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d)=1,$$

cette dernière égalité venant de $\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{n,1}$.

On a donc

$$\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}+\mathcal{O}(1)\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+\mathcal{O}(x)+\mathcal{O}(x\ln(x))=\frac{3}{\pi^2}x^2+\mathcal{O}(x\ln(x)).$$

□

Remarques : • On peut rajouter la preuve de l'inversion de Moebius comme ce développement est un peu court.
• Les ordres moyens sont souvent les renseignements les plus simples à déterminer sur une fonction arithmétique.
• On peut aussi trouver un ordre moyen de $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$: c'est $x \mapsto \ln(x) + 2\gamma - 1$. On a même

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x(\ln(x) + 2\gamma - 1) + \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

C'est aussi dans le Tenenbaum, il faut démontrer le lemme de l'hyperbole mais cela ne pose pas de difficulté.

Sur une idée d'Alexandre Bailleul.