Méthode de la sécante

Références : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, p 102

La méthode de Newton est une méthode numérique de recherche de points fixes. L'idée est de remplacer f par sa tangente en x_p. On a ainsi $y = f(x_p) + f'(x_p)(x - x_p)$, et donc l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses $y = 0$ est $x_{p+1} = x_p - \dfrac{f(x_p)}{f'(x_p)}$. Elle est très performante (ordre 2). Néanmoins il est nécessaire de bien connaître la dérivée de f pour pouvoir calculer la suite approximant le zéro définie par $x_{p+1} = x_p - \dfrac{f(x_p)}{f'(x_p)}$. Le but de la méthode de la sécante est d'approximer f' par une corde.

Insérez un dessin ici !

Théorème.

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$, a un zéro de f et tel que $f'(a) \neq 0$. On pose $I = [a - r, a + r]$ un intervalle où f' ne s'annule pas, et on définit la suite x_p par

$$x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\tau_p}, \text{ avec } \tau_p = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}.$$

Alors si on note $(s_p)_p$ la suite de Fibonacci de premiers termes $s_0 = s_1 = 1$, il existe K et h des réels positifs tels que pour x_0, $x_1 \in [a - h, a + h]$ distincts, on a

$$|x_p - a| \leqslant \frac{1}{K} \left(K \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)\right)^{s_p}.$$

Démonstration. On note $M_i = \max_I \left|f^{(i)}\right|$, $m_i = \min_I \left|f^{(i)}\right|$, et

$$\tau : \begin{array}{ccl} I \times I & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ si } x \neq y \\ f'(x) \text{ si } x \neq y \end{cases} \end{array}.$$

• Étude de τ :
On remarque que $\tau(x, y) = \displaystyle\int_0^1 f'(x + t(y - x))\mathrm{d}t$, donc par les théorèmes sur les intégrales à paramètres, τ est $\mathcal{C}^1$.
On peut alors utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale car f est $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 (1 - t) f''(x + t(y - x))\mathrm{d}t \text{ et } \frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 t f''(x + t(y - x))\mathrm{d}t.$$

D'où on a $\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial x}\right| \leqslant \dfrac{M_2}{2}$ et $\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial y}\right| \leqslant \dfrac{M_2}{2}$, et comme f' est de signe constant, $|\tau| \geqslant m_1$.
Pour finir, on a $\left|\tau(x, y) - f'(x)\right| = |\tau(x, y) - \tau(x, x)| = \left|\displaystyle\int_x^y \frac{\partial \tau}{\partial y}(x, t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M_2}{2} |y - x|$.

• Raisonnons de la même manière sur $\psi(x, y) = x - \dfrac{f(x)}{\tau(x, y)}$.
Posons $h_p = x_p - a$, alors comme $x_{p+1} = \psi(x_p, x_{p-1})$, on a

$$\forall p \geqslant 1, h_{p+1} = \psi(x_p, x_{p-1}) - a = \psi(a + h_p, a + h_{p-1}) - \psi(a, a).$$

On remarque comme précédemment que

$$h_{p+1} = \int_0^1 h_p \frac{\partial \psi}{\partial x}(a + th_p, a + th_{p-1}) + h_{p-1} \frac{\partial \psi}{\partial y}(a + th_p, a + th_{p-1})\mathrm{d}t.$$

Puis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{f'(x)\tau(x,y) - f(x)\frac{\partial \tau}{\partial x}}{\tau(x,y)^2} = \dfrac{\tau(x,y) - f'(x)}{\tau(x,y)} + f(x)\dfrac{\frac{\partial \tau}{\partial x}}{\tau(x,y)^2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = f(x)\dfrac{\frac{\partial \tau}{\partial y}}{\tau(x,y)^2} \end{cases}$$

En utilisant les inégalités de la première étape et le fait que $|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leqslant M_1 |x-a|$ par les accroissement finis, on a :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{M_2 |y-x|}{2m_1} + |x-a| \dfrac{M_1 M_2}{2m_1^2} \\ \left|\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant |x-a| \dfrac{M_1 M_2}{2m_1^2} \end{cases}$$

On fixe alors $(x,y) = (a + th_p, a + th_{p-1})$ pour $t \in [0,1]$ et $p \geqslant 1$ en supposant que x_p, $x_{p-1} \in I$ (on le montrera à la fin par récurrence), alors $|y-x| \leqslant (|h_p| + |h_{p-1}|)t$ et $|x-a| = |h_p|\, t$, donc

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \left(\dfrac{M_2}{2m_1}(|h_p| + |h_{p-1}|) + \dfrac{M_1 M_2}{2m_1^2} |h_p|\right) t \\ \left|\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{M_1 M_2}{2m_1^2} |h_p|\, t \end{cases}$$

D'où en mettant tout bout à bout :

$$\begin{aligned} |h_{p+1}| &\leqslant \left(\frac{M_2}{2m_1} |h_p| (|h_p| + |h_{p-1}|) + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2} |h_p|^2 + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2} |h_p| |h_{p-1}|\right) \int_0^1 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{M_2}{2m_1} + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}\right)}_{K} |h_p| (|h_p| + |h_{p-1}|) \\ &\leqslant K |h_p| \max(|h_p|, |h_{p-1}|). \end{aligned}$$

- Conclusion :

On pose $h = \min(r, \dfrac{1}{K})$, alors pour x_0, $x_1 \in [a-h, a+h]$, on a $|h_2| \leqslant K\dfrac{1}{K} \max(|h_1|, |h_0|) \leqslant h$. Par récurrence, cela légitime tous les calculs du dessus et on a $\forall p \geqslant 1$, $|h_{p+1}| \leqslant |h_p| \leqslant h$ donc

$$\forall p \geqslant 2, |h_{p+1}| \leqslant K |h_p| |h_{p-1}|.$$

On a trivialement $|h_p| \leqslant \dfrac{1}{K} (K \max(|h_0|, |h_1|))^{s_p}$ pour $p = 0$ ou $p = 1$.

Pour $p = 2$, on a vu $|h_2| \leqslant K |h_1| \max(|h_1|, |h_0|) \leqslant \dfrac{1}{K} K^2 \max(|h_1|, |h_0|)^2$.

Enfin, si on suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $p \geqslant 2$, alors

$$|h_{p+1}| \leqslant K |h_p| |h_{p-1}| \leqslant K\frac{1}{K} (K \max(|h_0|, |h_1|))^{s_p} \frac{1}{K} (K \max(|h_0|, |h_1|))^{s_{p-1}} = \frac{1}{K} (K \max(|h_0|, |h_1|))^{s_{p+1}}.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Remarques : • Attention à ne pas oublier le cas $p = 2$! La relation $|h_{p+1}| \leqslant K |h_p| |h_{p-1}|$ n'est pas forcément vraie pour $p = 1$.

• On dit qu'une suite converge à l'ordre au moins p si il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|x_{k+1} - a| \leqslant |x_k - a|^p$. La méthode de Newton est d'ordre 2. Il est difficile de mettre l'équation sous cette forme pour la méthode de la sécante. Néanmoins, on voit (et on vérifie numériquement) que comme $s_p \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}$, l'ordre vaut $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. C'est donc une méthode moins rapide que celle de Newton, mais tout de même efficace.

• On a mieux que le théorème, on a trouvé une manière explicite de calculer le h pour avoir la convergence. Mais en pratique, on ne sait pas quel est le zéro de f, donc une question subsiste : comment choisir l'intervalle où on va converger quand on ne sait pas où est le zéro ?

Et bien, c'est difficile ! En pratique, l'algorithme converge tout le temps, mais c'est parce qu'on a de la chance.

• Et en dimensions supérieures ? Il existe des trucs, c'est détaillé dans le Allaire.

• On peut s'inspirer de cette méthode pour l'épreuve de modélisation ! En effet plutôt que de calculer la dérivée de f dans la méthode de Newton, on peut juste poser

$$\frac{f(x + \sqrt{\%eps}) - f(x)}{\sqrt{\%eps}}.$$

On trouve une méthode d'ordre compris entre φ et 2.