Méthode de Laplace

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, ex 113

Théorème.

Soient $a < b \leqslant \infty$, $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b[$ [a] avec $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ continue en a telle que $f(a) \neq 0$. On suppose de plus qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-t_0\varphi} f \in L^1(]a, b[)$, alors l'intégrale $F(t) = \displaystyle\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x$ est définie pour $t \geqslant t_0$ et

1. si $\varphi'(a) > 0$, alors $F(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\varphi'(a)} \times \dfrac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}$,
2. si $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varphi''(a)}} \times \dfrac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$.

a. C'est à dire φ est la restriction d'une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert contenant $[a, b[$.

Démonstration. On peut supposer $t_0 = 0$. En effet, il suffit de poser $\tilde{f} = e^{-t_0\varphi} f$ et on a l'énoncé voulu.

• L'intégrale F est bien définie.
En effet, φ est croissante, donc pour $t \geqslant 0$,

$$\left| e^{-t\varphi(x)} f(x) \right| \leqslant e^{-t\varphi(a)} |f(x)| \in L^1.$$

• Commençons par étudier deux exemples : commençons par $a = 0$ et $\varphi(x) = x$.
La continuité de f en 0 donne l'existence de $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $|f| \leqslant M$ sur $[0, \alpha]$. Alors pour $t > 0$, on a

$$t \int_0^\alpha e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-y} f(0)\mathrm{d}y = f(0).$$

Le passage à la limite est justifié par le théorème de convergence dominée car $\left| e^{-y} f(\frac{y}{t}) \mathbb{1}_{[0,t\alpha]} \right| \leqslant Me^{-y} \in L^1([0, \infty[)$.
Puis comme $f \in L^1$, on a

$$t \left| \int_\alpha^b e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant te^{-t\alpha} \int_0^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a bien

$$\int_0^b e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x \sim \frac{f(0)}{t}.$$

Continuons avec un autre exemple : supposons que $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$.
Par la même méthode que précédemment, on a pour $t > 0$

$$\sqrt{t} \int_0^\alpha e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{t}\alpha} e^{-y^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-y^2} f(0)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0).$$

Puis

$$\sqrt{t} \left| \int_\alpha^b e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \sqrt{t} e^{-t\alpha^2} \int_0^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)\mathrm{d}x \sim \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}.$$

• Étudions à présent le premier cas du théorème : $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$.
L'idée est de se ramener aux cas vus en exemple.

On pose donc naturellement le changement de variable $u = \varphi(x) - \varphi(a)$ (Comme φ est strictement croissante, on obtient bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.) et on note ψ sa bijection réciproque. Alors on a

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\psi^{-1}(b)} e^{-tu} f(\psi(u))\psi'(u)\mathrm{d}u \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\psi'(0)}{t}.$$

Or $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \dfrac{1}{\varphi'(\psi(0))} = \dfrac{1}{\varphi'(a)}$, donc on a bien

$$F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}.$$

- Il reste enfin le deuxième cas à traiter : $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$.

On pose ici $u = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$. On a bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme par théorème d'inversion globale car φ est strictement croissante. On note à nouveau ψ l'inverse.
On a alors

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\psi^{-1}(b)} e^{-tu^2} f(\psi(u))\psi'(u)\mathrm{d}u \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi} f(\psi(0))\psi'(0)}{2\sqrt{t}}.$$

On sait que $\psi(0) = a$, puis

$$(\psi^{-1})'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2\varphi''(a)/2}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}.$$

Donc $\psi'(0) = \dfrac{1}{(\psi^{-1})'(\psi(0))} = \sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$ et on retrouve le résultat annoncé :

$$F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \times \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

$\square$

Corollaire (Formule de Stirling)**.**

On a

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}.$$

Démonstration. On a

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t \mathrm{d}x.$$

Pour faire apparaître la forme du théorème, on applique le changement de variable $x = t(u+1)$ pour $t > 0$, ainsi on a

$$\Gamma(t+1) = \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1)} t^t (u+1)^t t\mathrm{d}u = t^{t+1} \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1-\ln(u+1))}\mathrm{d}u.$$

On pose $f = 1$ et $\varphi(u) = u + 1 - \ln(u+1)$. Alors $\varphi'(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u}$ et $\varphi''(u) = \dfrac{1}{(1+u)^2}$.
On remarque que $\varphi' > 0$ sur $]0, \infty[$, donc en appliquant le théorème, on a

$$\int_0^\infty e^{-t(u+1-\ln(u+1))}\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(0)}} \times \frac{e^{-t\varphi(0)} f(0)}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

Puis en faisant le changement de variable $v = -u$ dans la seconde intégrale, on a

$$\int_{-1}^0 e^{-t(u+1-\ln(u+1))}\mathrm{d}u = \int_0^1 e^{-t(1-v-\ln(1-v))}\mathrm{d}v.$$

On pose $\widetilde{\varphi}(v) = 1 - v - \ln(1-v)$ et on remarque que le théorème s'applique. On obtient alors

$$\int_{-1}^0 e^{-t(u+1-\ln(u+1))}\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

D'où il vient

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} 2t^{t+1} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} = \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}.$$

$\square$

Remarques : • On a un résultat similaire pour les intégrales du type $\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x$. On appelle cela la méthode de la phase stationnaire. Le lecteur intéressé pourra regarder le Zuily, Queffelec ou le Zuily.
• Ce développement semble un peu obscure sans l'expliquer un peu. Il faut se dire que φ est croissante et qu'en conséquence, comme l'exponentielle décroît vite, la valeur de l'intégrale est concentrée en $[a, a+\epsilon[$. On applique alors des formules de Taylor pour voir ce que l'intégrale donne.