Lemme de Morse

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, ex114 p354 + ex66 p209 (lemme)

Lemme (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)**.**

Soit $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que : $\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.

En d'autres termes, toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée, lui est équivalente et le changement de base "dépend de manière $\mathcal{C}^1$" en la matrice. En particulier, ce lemme prouve que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature donnée forme un ouvert de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [1].

Démonstration. • Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$, elle est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous multiplicative $\|.\|$.
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|) = {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|)$.
D'où $D\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$.

On a de plus $H \in \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. [2]. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'inversion locale.

• On va restreindre φ sur un supplémentaire de son noyau et appliquer le théorème d'inversion.
On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On pose donc $F = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on remarque $I_n \in F$.
Soit $\psi : F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. $D\psi(I_n)$ est injective par construction. Elle est même bijective car $\dim(F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F tel que ψ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \psi(U)$.
On peut de plus supposer $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, par continuité de det, il existe un voisinage ouvert U' de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenu dans U. On peut alors restreindre notre $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme à U' et son image sera $\psi(U')$, il reste alors un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\rho = \psi^{-1}$. □

Théorème (Lemme de Morse)**.**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$.
On suppose que $Df(0) = 0$ (0 est un point critique), que $D^2f(0)$ est non dégénérée et que $\varepsilon(D^2f(0)) = (p, n-p)$.
Alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0.
$f(x) - f(0) = Df(0)(x) + \displaystyle\int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x,x)\mathrm{d}t = {}^txQ(x)x$ avec $Q(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)D^2f(tx)\mathrm{d}t$.
Q est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, $Q(0) = \dfrac{1}{2}D^2f(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ car non dégénérée.
On peut donc appliquer le lemme : il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$.
Or Q est continue, donc il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$. Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$, donc $Q(x) = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$. On pose $M(x) = \rho(Q(x))$.

1. pour $A_0 = I_n$, on en déduit l'existence d'une racine carrée symétrique pour A symétrique proche de I_n.
2. On peut montrer que cette application est aussi surjective.

D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester appliquée à $Q(0)$ qui est aussi de signature $(p, n-p)$, $\exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$. Finalement $f(x) - f(0) = {}^t x {}^t M(x) {}^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} AM(x)x$. En posant $\varphi(x) = AM(x)x$, on a $f(x) - f(0) = {}^t \varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$. Et donc avec $u = \varphi(x)$, on a bien $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$.

Il reste à montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0.
φ est $\mathcal{C}^1$ car M l'est (en effet, ρ est $\mathcal{C}^1$ et Q est supposé $\mathcal{C}^1$ car f est $\mathcal{C}^3$).
Calculons la différentielle à l'origine de φ : $\varphi(h) - \varphi(0) = AM(h)h = AM(0)h + o(\|h\|)$.
Comme $AM(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(0)$ est inversible.
D'après le théorème d'inversion locale appliqué à φ, il existe deux voisinages de 0 (en fait de 0 et de $\varphi(0) = 0$) tels que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre ces deux voisinages. □

Remarque : • En fait ce théorème est vrai pour f de classe $\mathcal{C}^1$ et possédant une différentielle seconde non dégénérée en 0. On peut trouver une preuve dans le cours d'analyse de Doukhan et Sifre.
• (Rouvière, ex 111) On se donne f de classe $\mathcal{C}^3$ et a un tel que $D^2 f(a)$ **soit non dégénérée**. On pose $\delta(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)h$, alors par le lemme de Morse, $\delta(h) = \varepsilon_1 u_1^2(h) + \varepsilon_2 u_2^2(h)$ dans un voisinage de a, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$.
$h \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(a) + Df(a)h$ est l'équation paramétrique du plan tangent, donc $\delta(h)$ représente la différence entre $f(h)$ et sa projection verticale sur le plan tangent.
On en déduit que si la signature est $(2, 0)$, alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ et f est au dessus de son plan tangent localement en a. Au contraire, si la hessienne est définie négative, f est localement au dessous de son plan tangent.
Si la signature est $(1, 1)$, $\delta(h) = u_1^2(h) - u_2^2(h)$ et donc f coupe son plan tangent en une courbe (qui n'est pas une variété) avec un point double définie par $u = \pm v$.[3]
• Si $D^2 f(a)$ est dégénérée, on ne peut rien dire sans étudier les termes suivants dans le développement de Taylor.
• Pour aller plus vite, on note $V \in \mathcal{V}(A)$ pour dire V voisinage de A.

Adapté du travail de Laura Gay

3. C'est là un lien important entre cône isotrope et géométrie différentielle.