Méthode de Kacmarz

Références : Aucune

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $b \in R^n$. On cherche la solution x_∞ du système linéaire $Ax = b$. La méthode de Kacmarz consiste à construire une suite récurrente en projetant sur des hyperplans bien choisis.

Algorithme.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note ${}^{\mathrm{t}}a_i$ la i-ème ligne de la matrice A. On définit les vecteurs "renormalisés" suivants : $u_i = \dfrac{a_i}{\|a_i\|}$ et $\alpha = \left(\dfrac{b_i}{\|a_i\|}\right)_i$.

On considère les hyperplans affines, H_i, de direction $\mathrm{Vect}(u_i)^\perp$, passant par $\alpha_i u_i$. On note Π_i la projection sur $\mathrm{Vect}(u_i)^\perp$. On confondra abusivement le projecteur et sa matrice dans la base canonique.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On construit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $k \in \mathbb{N}$, x_{k+1} est la projection de x_k sur H_r, où $r \equiv 1 + k\ [n]$, *id est* $x_{k+1} = \Pi_r(x_k) + \alpha_r u_r$.

Lemme.

On a
$$\{x_\infty\} = \bigcap_{i=1}^{n} H_i.$$

Démonstration.
• Soit $z \in H_i$, alors il existe $z_i \in \mathrm{Vect}(u_i)^\perp$ tel que $z = \alpha_i u_i + z_i$. On en déduit que $\langle a_i, z\rangle = b_i$. Ainsi, pour $z \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, on a : $Az = b$, *id est* $\bigcap_{i=1}^{n} H_i \subset \{x_\infty\}$.
• Pour l'inclusion réciproque, comme $Ax_\infty = b$, on a pour tout i, $\langle a_i, x_\infty\rangle = b_i$, donc $\langle u_i, x_\infty\rangle = \alpha_i$.
Pour conclure, on utilise que
$$\forall i, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}u_i \oplus^\perp \mathrm{Vect}(u_i)^\perp.$$
Ainsi $x_\infty = \delta_i u_i + c_i$ avec $c_i \in \mathrm{Vect}(u_i)^\perp$ et le produit scalaire précédent donne $\delta_i = \alpha_i$, donc $x_\infty \in H_i$. ☐

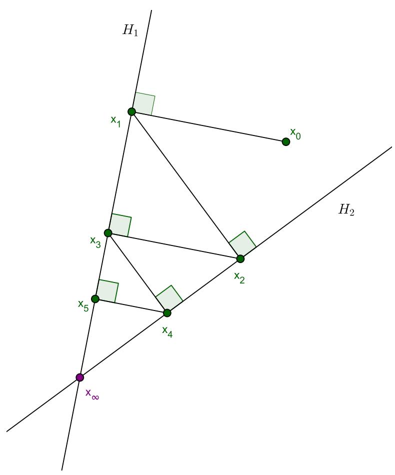

Figure 1 – Illustration de la méthode.

Lemme.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire. Le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^\perp$ a pour matrice dans la base canonique $\Pi = I_n - u^t u$. De plus, on a : $\|\Pi\| = 1$ et pour tout $x \notin \text{Vect}(u)^\perp$ on a : $\|\Pi x\| < \|x\|$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = \Pi x$ le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(u)^\perp$. Le vecteur y est caractérisé par :

$$\begin{cases} y \in \text{Vect}(u)^\perp \\ \forall z \in \text{Vect}(u)^\perp, \quad \langle z, y - x\rangle = 0 \end{cases}$$

On pose $\tilde{y} = (I_n - u^t u)x$. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \langle u, \tilde{y}\rangle &= \langle u, x\rangle - \left\langle u, u^t u x\right\rangle \\ &= \langle u, x\rangle - \left\langle u^t u u, x\right\rangle \\ &= \langle u, x\rangle - \langle u, x\rangle \quad \text{car } {}^t u u = 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\tilde{y} \in \text{Vect}(u)^\perp$. D'autre part, pour tout $z \in \text{Vect}(u)^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} \langle z, x - \tilde{y}\rangle &= \langle z, x\rangle - \langle z, \tilde{y}\rangle \\ &= \langle z, x\rangle - \langle z, x\rangle + \left\langle z, u^t u x\right\rangle \\ &= \left\langle u^t u z, x\right\rangle \\ &= 0 \quad \text{car } {}^t u z = \langle u, z\rangle = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\tilde{y} = y$ et $\Pi = I_n - u^t u$.

Pour conclure, soit $x \in \mathbb{R}^n$, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\|x\|^2 = \|\Pi x\|^2 + \|(I_n - \Pi)x\|^2$. On en déduit que : $\|\Pi\| = 1$ ainsi que l'inégalité stricte. □

Nous allons maintenant pouvoir nous intéresser à la convergence de cette méthode.

Théorème.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x_∞.

Démonstration. On note $\epsilon_k = x_k - x_\infty$ l'erreur d'approximation à l'étape k. On remarque que l'on a $\epsilon_{k+1} = \Pi_r \epsilon_k$. En effet, on a

$$\begin{cases} x_\infty = \alpha_r u_r + \Pi_r x_\infty \text{ (car } x_\infty \in H_r) \\ x_{k+1} = \Pi_r(x_k) + \alpha_r u_r \end{cases},$$

donc

$$\varepsilon_{k+1} = \Pi_r(x_k) + \alpha_r u_r - \alpha_r u_r - \Pi_r x_\infty = \Pi_r \epsilon_k.$$

Il s'ensuit que la suite $(\|\epsilon_k\|)_k$ est décroissante et minorée par zéro. Elle converge donc. On pose $T = \Pi_n \dots \Pi_1$. Pour tout k, on a : $\|\epsilon_{kn}\| \leqslant \|T\|^k \|\epsilon_0\|$. Il nous suffit donc de montrer que l'on a : $\|T\| < 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|Tx\| = \|x\|$. Cela signifie que pour tout i $\|\Pi_{i+1}(\Pi_i \dots \Pi_1)x\| = \|(\Pi_i \dots \Pi_1)x\|$. Or d'après le lemme 2, on en déduit que pour tout i, $(\Pi_i \dots \Pi_1)x \in \text{Vect}(u_{i+1})^\perp$ et $(\Pi_i \dots \Pi_1)x = x$. Il en résulte que $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Vect}(u_i)^\perp$, *id est* $Ax = 0$. Ainsi $x = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|Tx\| < \|x\|$.

Comme on travaille en dimension finie, on a bien $\|T\| < 1$.[1] Ce qui montre la convergence. □

1. La boule unité étant compacte, T atteint son maximum dessus.

Remarques : • Le calcul d'une matrice Π_i demande $\mathcal{O}(n^3)$ opérations élémentaires. Mais comme on calcule toujours sa valeur en un certain vecteur y, on a juste à calculer $\Pi_i y = y - \langle u, y \rangle u$. Cela fait $\mathcal{O}(n)$ opérations élémentaires.
Ainsi, pour faire une n-itération (calculer Ty), il faut $\mathcal{O}(n^2)$ opérations élémentaires. On est dans le même ordre de grandeur que pour les autres méthodes de résolution approchée de systèmes linéaires (gradient, itératives linéaires...).
• En dimension infinie, le dernier argument du développement est faux. Plaçons-nous dans $(c_0(\mathbb{N}), \|\|_\infty)$ les suites réelles tendant vers 0. Alors pour l'opérateur $Tu = \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$, on a bien $\|Tu\| < \|u\|$ si $u \neq 0$ et $\|T\| = 1$.
• Dans le cas où A est orthogonale, ses lignes sont orthogonales et donc l'algorithme termine en au plus n étapes.
• En fait, l'algorithme marche quand même lorsque A n'est pas inversible et quand b est dans l'image de A. (Merci Thibaut Tardieu)

Adapté du travail de Baptiste Huguet.