Formule des compléments

Références : Amar, Matheron, *Analyse complexe*, p 249-251

Théorème.

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Démonstration. D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} \, \mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t-s} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(s+t)} \, \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\left\{\begin{array}{lcl} u & = & s+t \\ v & = & \dfrac{s}{t} \end{array}\right.$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{t} & \dfrac{-s}{t^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{\alpha}(v+1)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(v+1)}.$$

Le lemme suivant termine la preuve. □

Lemme.

On a l'égalité suivante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration. $\forall \alpha \in]0,1[$, on définit $I_\alpha := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t)}$.
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

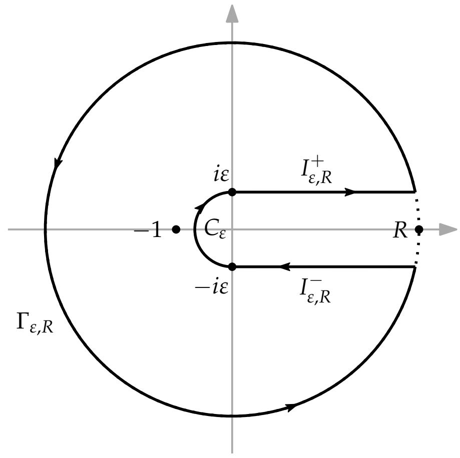
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (donc localement intégrable) ;
- En 0 : $\dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha}}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;
- En $+\infty$: $\dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, on prend la définition de l'argument associée à Ω [1] et on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$,

où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ quand $z = re^{i\theta}$, où $\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z\to -1} (1+z)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$ et $\varepsilon < 1$, on définit le chemin orienté (voir dessin) $\gamma_{\varepsilon,R} = C_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \cup \Gamma_{\varepsilon,R} \cup I^-_{\varepsilon,R}$, où :

— $C_\varepsilon = \left\{ \varepsilon e^{i\theta} \middle| \theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right] \right\}$;

— $I^\pm_{\varepsilon,R} = \left[\pm\varepsilon i, \pm\varepsilon i + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \right]$;

— $\Gamma_{\varepsilon,R} = \left\{ Re^{i\theta} \middle| \theta \in [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] \right\}$,

avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \right)$.

Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

On va passer à la limite quand $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$.

- Sur C_ε, on a

$$\left| \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{(1-\alpha)}}{1-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- Sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$, on a

$$\left| \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \left| \int_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant 2\pi \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Sur $I^+_{\varepsilon,R}$, on a

$$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(\varepsilon i + t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{1}{(t+\varepsilon i)^\alpha (1+t+\varepsilon i)}\,\mathrm{d}t.$$

Or $(t+\varepsilon i)^\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} t^\alpha$, donc comme

— $\mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) f(\varepsilon i + t) \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t) \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$;

— $\left| \mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) f(\varepsilon i + t) \right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t) \dfrac{1}{|t-\varepsilon|^\alpha (1+t)}$ qui est intégrable,

par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim \int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = I_\alpha$$

- Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $(t-\varepsilon i)^\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$ ([2]), on a :

$$\lim \int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$$

Conclusion : en tenant compte de l'orientation des intégrales, notre théorème des résidus donne

$$\left(1 - e^{-2i\pi\alpha}\right) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

On a donc bien

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

□

1. Il est important d'insister sur ce point ! Si l'on prenait la détermination sur $]-\pi, \pi[$, nos intégrales ne seraient pas définies.
2. C'est ici que notre définition de l'argument sur $]0, 2\pi[$ prend du sens : dans le premier cas, on est à partie imaginaire positive, alors qu'ici on tend vers t à partie imaginaire négative.

Remarques : • J'admets qu'appeler un contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ quand on étudie la fonction Γ n'est pas très malin.
• Une application importante de la formule des compléments est le prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ de ζ (voir Amar, Matheron, p252-254).
La fonction ζ sert partout et son prolongement permet notamment de donner du sens à des sommes non définies du type $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...$ Elle permet aussi d'étudier les nombres premiers et leur répartition.
Cela devrait suffire comme application. ♡
• Il y a une autre application au calcul de $\displaystyle\int_x^{x+1} \log(\Gamma(s))\mathrm{d}s$ à la page 54 du Chambert-Loir (analyse 2). (Merci Cléééééééééééééééééééééééément Vince !)

Adapté du travail de Florian Lemonnier.