Espace de Bergman

Références : Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, p 104

L'objectif de ce développement est d'étudier l'espace de Bergman

$$A^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy < \infty \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$.

Lemme.

Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, on a

$$\forall f \in A^2(\mathbb{D}), \; \|f\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \mathbb{S}^1)} \times \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. Soit a un élément de $\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{D}$ est ouvert, il existe r un réel strictement positif tel que $\mathbb{D}(a,r)$ soit inclus dans $\mathbb{D}$. D'après la formule de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z) \, dxdy.$$

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leqslant \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{\mathbb{D}(a,r)} |f(z)|^2 \, dxdy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}(a,r)} dxdy \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{\left(\pi r^2\right)^{1/2}}{\pi r^2} \|f\|_{L^2} \\ &= \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\, r}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre r vers $d(a, \mathbb{S}^1)$ pour obtenir

$$|f(a)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\, d(a, \mathbb{S}^1)}.$$

Étant donné que $d(K, \mathbb{S}^1) \leqslant d(a, \mathbb{S}^1)$, le résultat s'ensuit alors. □

Proposition.

$A^2(\mathbb{D})$ munit du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $A^2(\mathbb{D})$. Alors d'après le lemme précédent, on a pour tout compact K de $\mathbb{D}$:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leqslant \frac{\|f_n - f_m\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\, d(K, \mathbb{S}^1)}.$$

Ainsi, sur tout compact, (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ qui est complet pour la norme uniforme, donc quitte à prendre des compacts emboîtés, on a l'existence de f continue sur $\mathbb{D}$ et limite uniforme sur tout compact de (f_n). D'après le théorème de Weierstrass, f est holomorphe.
De plus, $L^2(\mathbb{D})$ est un espace complet donc (f_n) admet une limite g dans $L^2(\mathbb{D})$. Or, d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout sur $\mathbb{D}$ vers g. Ainsi, $f = g$ presque partout sur $\mathbb{D}$ et f est un élément de $L^2(\mathbb{D})$. □

Pour toute la suite, on pose pour tout entier naturel n

$$e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sqrt{\dfrac{n+1}{\pi}} z^n \end{array}.$$

Proposition.

La famille (e_n) forme une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Le caractère orthonormée de (e_n) est immédiat, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n z^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \left(\int_{r=0}^{1} r^{n+m+1} \mathrm{d}r\right) \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta\right) \\ &= \frac{2\pi\sqrt{(n+1)(m+1)}}{(n+m+2)\pi} \delta_{n,m} \\ &= \frac{2\pi(n+1)}{(2n+2)\pi} \delta_{n,m} \\ &= \delta_{n,m}\end{aligned}$$

À présent, considérons f une fonction de $A^2(\mathbb{D})$ orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_n)$. On note $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ et on a donc par supposition $c_n(f) = 0$.
Comme f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, elle est analytique sur $\mathbb{D}$ et il existe (a_n) une suite de nombres complexes telle que

$$\forall z \in \mathbb{D} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n f(z)\ dxdy \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\int_{|z|<r} \overline{z}^n f(z)\ dxdy\right) \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k\ dxdy\right),\end{aligned}$$

la première égalité provenant du théorème de convergence dominé et la deuxième du fait de la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{D}$ de la série entière $\sum a_n z^n$. Or avec un changement de variables polaires, il vient :

$$\int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k\ dxdy = \frac{2\pi\ r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_{k,n} = \frac{\pi\ r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n},$$

donc

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\pi\ r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\ a_n \lim_{r\to 1} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\ a_n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. On en déduit $f = 0$ et la famille $(e_n)_n$ est bien une base hilbertienne. □

Remarques : • Il existe un noyau pour les fonctions de $A^2(\mathbb{D})$.

Proposition.

Soit F une fonction de $A^2(\mathbb{D})$. Alors :

$$\forall \zeta \in \mathbb{D} : F(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \frac{F(z)}{\pi(1-\zeta\ \overline{z})^2}\ dxdy.$$

Démonstration. Posons

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (\zeta, z) & \mapsto & \dfrac{1}{\pi(1-\zeta\ \overline{z})^2} \end{array}.$$

Il est immédiat que pour tout ζ de $\mathbb{D}$, $k(\zeta, .)$ est un élément de $A^2(\mathbb{D})$. Soit $F \in A^2(\mathbb{D})$ et (a_n) la suite de nombres complexes associée telle que

$$\forall z \in \mathbb{D} : F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On fixe $\zeta \in \mathbb{D}$. Comme (e_n) est une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$, il vient

$$\langle k(\zeta, .), F\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n \langle k(\zeta, .), e_n\rangle.$$

Or, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \langle k(\zeta, .), e_n\rangle &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \frac{z^n}{(1-\zeta\ \overline{z})^2}\ dxdy &&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\zeta\ \overline{z})^k\right)' z^n\ dxdy \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\zeta\ \overline{z})^k z^n\right) dxdy &&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\zeta^k \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^k z^n dxdy\ . \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\zeta^k \frac{2\pi}{2k+2} \delta_{n,k} &&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n \end{aligned}$$

Il suffit alors de reporter cette expression pour conclure. □

• Apparemment, on peut faire des opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Bergman et il y aurait des applications obscures en physique quantique...

Adapté du travail de Paul Alphonse.