Cône nilpotent

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie - Tome second*, p 213-215

On s'intéresse au nombre d'endomorphisme nilpotents sur un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie d. On notera $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphisme nilpotent. Un choix de base le met en bijection avec l'ensemble $\mathcal{N}_d(\mathbb{F}_q)$ des matrices nilpotentes de taille d à coefficients dans $\mathbb{F}_q$.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension d. On a :

$$n_d = |\mathcal{N}(E)| = q^{d(d-1)} \quad .$$

Pour $1 \leqslant r \leqslant d$, on pose $L_{r,d}$ l'ensemble des familles des vecteurs de E, libres à r éléments. On dit qu'un endomorphisme nilpotent N *respecte* une famille $\varepsilon \in L_{r,d}$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant r-1$, on a $\varepsilon_{i+1} = N\varepsilon_i$ et $N\varepsilon_r = 0$.

On pose X l'ensemble suivant :

$$X = \{(N, \varepsilon)/N \in \mathcal{N}(E), \exists r, \varepsilon \in L_{r,d} \text{ et } N \text{ respecte } \varepsilon\} \quad .$$

On va dénombrer X de deux manières.

Lemme.

Soit $e \in E \backslash \{0\}$ et $N \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe un unique r maximal tel que la famille

$$\varepsilon = (e, Ne, \ldots, N^{r-1}e)$$

soit libre. On a de plus : $N^r e = 0$.

Démonstration. L'existence de r est triviale car N est nilpotente. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{N^s e/s \in \mathbb{N}\}$. La famille ε est libre dans F. Montrons qu'elle est génératrice. La famille $(e, Ne, \ldots, N^r e)$ est liée, il existe donc une famille de scalaire $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ non tous nuls telle que : $\sum_{i=0}^{r} a_i N^i e = 0$. Par liberté de ε, a_r ne peut-être nul. On le supposera donc égal à 1. On a donc : $N^r e = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i N^i e$.

Pour $s = r + k$, on montre par récurrence sur k que $N^s e \in \mathrm{Vect}(\varepsilon)$. En effet, on a : $N^s e = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i N^{i+k} e$. La famille ε est donc une base de F.
On considère la restriction de N à F, notée $\tilde{N}$. C'est un endomorphisme nilpotent. Dans la base ε, sa matrice est la matrice compagnon suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donc : $\chi_{\tilde{N}} = X^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i$. Comme $\tilde{N}$ est nilpotent, on a donc $a_i = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant r-1$. Donc $N^r e = 0$ $\square$

Étape 1 : dénombrement sur la première coordonnée.
On a :

$$|X| = \sum_{N \in \mathcal{N}(E)} \pi_1^{-1}(N) \quad ,$$

où π_1 désigne la projection sur la première coordonnée. Or d'après le lemme, pour tout $N \in \mathcal{N}(E)$, on a une bijection entre les éléments de $E \backslash \{0\}$ et l'ensemble des familles libres respectées par N. Ainsi, on a : $|X| = n_d(q^d - 1)$.

Étape 2 : dénombrement sur la seconde coordonnée.
On a :

$$|X| = \sum_{r=1}^{d} \sum_{\varepsilon \in L_{r,d}} \pi_2^{-1}(\varepsilon) \quad ,$$

où π_2 désigne la projection sur la seconde coordonnée.
Soit $1 \leqslant r \leqslant d$. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur $L_{r,d}$ (d'après le théorème de la base incomplète). Pour $\varepsilon \in L_{r,d}$ on a donc $|L_{r,d}| = |Orb(\varepsilon)|$. D'après les relations orbite-stabilisateur, on a donc :

$$|L_{r,d}| = \frac{|GL(E)|}{|Stab(\varepsilon)|} \quad .$$

On complète ε en une base de E. Tous les raisonnements à suivre se feront dans cette base.
Or les matrices dans le stabilisateur de ε ont pour forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathcal{M}_{r,d-r}(\mathbb{F}_q) \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{d-r}(\mathbb{F}_q) \end{array}\right) \quad ,$$

ainsi, on a : $|Stab(\varepsilon)| = |\mathcal{M}_{r,d-r}(\mathbb{F}_q)||\mathrm{GL}_{d-r}(\mathbb{F}_q)| = q^{r(d-r)} g_{d-r}$, (où $g_i = |\mathrm{GL}_i(\mathbb{F}_q)|$). Le nombre de familles libres à r éléments est donc :

$$|L_{r,d}| = \frac{g_d}{q^{r(d-r)} g_{d-r}} \quad .$$

De plus, les matrices nilpotentes respectant ε sont de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} J_r & \mathcal{M}_{r,d-r}(\mathbb{F}_q) \\ \hline 0 & \mathcal{N}_{d-r}(\mathbb{F}_q) \end{array}\right) \quad ,$$

ainsi, pour tout $\varepsilon \in L_{r,d}$, on a : $|\pi_2^{-1}(\varepsilon)| = q^{r(d-r)} n_{d-r}$. On a donc :

$$|X| = \sum_{r=1}^{d} \frac{g_d n_{d-r}}{g_{d-r}} \quad .$$

Étape 3 : Conclusion.
En comparant les deux formules obtenues pour le cardinal de X, on a pour $d \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \frac{n_d}{g_d}(q^d - 1) &= \sum_{r=1}^{d} \frac{n_{d-r}}{g_{d-r}} \\ &= \sum_{r=0}^{d-1} \frac{n_r}{g_r} \\ &= \frac{n_{d-1}}{g_{d-1}} + \sum_{r=0}^{d-2} \frac{n_r}{g_r} \\ &= \frac{n_{d-1}}{g_{d-1}} + \frac{n_{d-1}}{g_{d-1}}(q^{d-1} - 1) \\ &= \frac{n_{d-1}}{g_{d-1}} q^{d-1} \end{aligned} \quad .$$

Par récurrence, comme $n_1 = 1$ et $g_1 = q - 1$, on a :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \; n_d = g_d \frac{\prod_{r=2}^{d} q^{r-1}}{\prod_{r=2}^{d} (q^r - 1)} \frac{n_1}{g_1} = g_d \frac{q^{d(d-1)/2}}{\prod_{r=1}^{d} (q^r - 1)}$$

et en utilisant la formule du cardinal de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, on obtient le résultat voulu.

Remarques : • On rappelle que pour calculer g_r, il faut compter le nombre de bases possibles. On a donc

$$g_r = \prod_{r=0}^{d-1} (q^d - q^r) = \prod_{r=0}^{d-1} q^r \times \prod_{r=1}^{d} (q^r - 1) = q^{d(d-1)/2} \prod_{r=1}^{d} (q^r - 1).$$

Adapté du travail de Baptiste Huguet.