Borne de Bézout

Références : Szpirglas, *Mathématiques L3 - Algèbre*, p 592
Mérindol, *Nombres et algèbre*, p 386
Saux Picart, *Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux*, p 157

Soit k un corps commutatif de cardinal infini. On se propose dans ce développement de majorer le nombre de points d'intersection de deux courbes planes à valeurs dans k.

Théorème.

Soient A et B deux polynômes de $k[X, Y]$ de degrés totaux respectifs m et n. Si A et B sont premiers entre eux et que k est de cardinal infini, alors $\#Z(A) \cap Z(B) \leqslant mn$.

Démonstration. Si A et B n'ont pas de racine commune, le résultat est évident et dans toute la suite, on suppose que $Z(A) \cap Z(B)$ est non vide.

On note $R_Y = \operatorname{Res}_Y(A, B)$ et $R_X = \operatorname{Res}_X(A, B)$. Pour tout $(x, y) \in Z(A) \cap Z(B)$, il vient $R_Y(x) = R_X(y) = 0$. Comme A et B sont premiers entre eux, R_Y est un polynôme non nul de $k[X]$ et il a au plus $\deg R_Y$ racines. Ainsi, il y a au plus $\deg R_Y$ possibilités pour l'abscisse d'un point de $Z(A) \cap Z(B)$. De la même façon, il y au plus $\deg R_X$ possibilités pour l'ordonnée de ces points. On en déduit que

$$\#Z(A) \cap Z(B) \leqslant \deg R_X \deg R_Y.$$

Notons à présent

$$A(X, Y) = \sum_{k=0}^{p} a_k(X) Y^k \quad B(X, Y) = \sum_{k=0}^{q} b_k(X) Y^k,$$

où $\deg a_k \leqslant m - k$, $\deg b_k \leqslant n - k$ et a_p, b_q sont deux éléments non nuls de k. Alors

$$R_Y = \det(\operatorname{Syl}_Y(A, B)) = \begin{vmatrix} a_p & & & b_q & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & a_p & b_0 & & \ddots & \\ a_0 & & \vdots & & \ddots & & b_q \\ & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & & & & b_0 \end{vmatrix}.$$

On note $\operatorname{Syl}_Y(A, B) = (c_{i,j})$. Alors

$$\forall j \in [\![1, q]\!] : \qquad c_{i,j} = \begin{cases} a_{p-(i-j)} & \text{si } 0 \leqslant i - j \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\forall j \in [\![q+1, q+p]\!] : \quad c_{i,j} = \begin{cases} b_{q-(i-(j-q))} & \text{si } -q \leqslant i - j \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{S}_{p+q} : \deg\left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j),j}\right) &= \sum_{j=1}^{p+q} \deg c_{\sigma(j),j} \leqslant \sum_{j=1}^{q} (m - p + \sigma(j) - j) + \sum_{j=q+1}^{q+p} (n - j + \sigma(j)) \\ &= mq - pq + np = mn + (m-p)(q-n) \leqslant mn, \end{aligned}$$

et avec la formule du déterminant, $\deg R_Y \leqslant mn$. On obtient de même $\deg R_X \leqslant mn$ puis

$$\#Z(A) \cap Z(B) \leqslant (mn)^2.$$

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à affiner la majoration précédente. Dans ce but, on numérote les éléments de $Z(A) \cap Z(B) = \{(x_i, y_i) : i \in [\![1, r]\!]\}$ et on pose

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{x_i - x_j}{y_j - y_i} : y_j \neq y_i, i, j \in [\![1, r]\!] \right\}.$$

Alors $\#\mathcal{E} < \#k^*$ car k est de cardinal infini et on peut considérer $u \in k^* \backslash \mathcal{E}$. Remarquons le fait suivant :

$$\forall i, j \in [\![1, r]\!] : x_i - x_j \neq u(y_j - y_i) \Leftrightarrow x_i + uy_i \neq x_j + uy_j.$$

On effectue alors le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} X' = X + uY \\ Y' = Y \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}(X', Y') = A(X, Y) \\ \tilde{B}(X', Y') = B(X, Y) \end{cases}.$$

Soit alors la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} Z(A) \cap Z(B) & \to & Z(\mathrm{Res}_{Y'}(\tilde{A}, \tilde{B})) \\ (x, y) & \mapsto & x + uy \end{array}$.

La fonction φ est bien définie car si $(x, y) \in Z(A) \cap Z(B)$, alors $A(x, y) = B(x, y) = 0$ ce qui entraîne $\tilde{A}(x + uy, y) = \tilde{B}(x + uy, y) = 0$ puis $\mathrm{Res}_{Y'}(\tilde{A}, \tilde{B})(x + uy) = 0$. De plus, φ est injective puisque u n'est pas un élément de $\mathcal{E}$. Ainsi :

$$\#Z(A) \cap Z(B) \leqslant \#Z(\mathrm{Res}_{Y'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leqslant \deg \mathrm{Res}_{Y'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leqslant mn$$

d'après le point précédent, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Remarques : • Ce développement est une simplification du vrai théorème de Bézout. Si on homogénéise A et B en polynômes homogènes de $\overline{k}[X, Y, T]$, alors si on compte la multiplicité des intersections et les points à l'infini, on a $\#Z(A) \cap Z(B) = mn$.
• Pour trouver les points d'intersections en pratique, on fait comme dans la preuve : on calcule les deux résultants (en X et en Y) et on cherche leurs zéros communs. En faisant cela, on obtient des équations seulement en X ou seulement en Y, d'où le nom de théorie de l'élimination.
Si on veut les points d'intersection à l'infini, il suffit d'homogénéiser les résultants, d'évaluer en "$T = 0$", puis de résoudre.
• La condition k infini n'est pas nécessaire. Il suffit de faire la preuve dans $\overline{k}$ qui est infini, puis comme $k \subset \overline{k}$, on a le résultat.

Adapté du travail de Paul Alphonse, Florian Lemonnier et Arnaud Stocker.