Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$

Références : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1*, 5.54
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*, 5.15

Théorème.

Les automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$ sont les homographies (ie les éléments de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$).

Démonstration. • On pose Φ un tel automorphisme, et $F = \Phi(X)$, alors on remarque que si $P = \sum a_k X^k$, on a $\Phi(P) = \sum a_k \Phi(X)^k = P \circ F$.
Soit maintenant $G = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on a $\Phi(P) = \Phi\left(\dfrac{P}{Q} \times Q\right) = \Phi\left(\dfrac{P}{Q}\right)\Phi(Q)$.
On en déduit $\Phi(G) = \dfrac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \dfrac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F$.
Dans la suite, on note $\Phi_F : G \mapsto G \circ F$ le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre précédent. On va chercher sous quelles conditions sur F, Φ_F est un automorphisme.

• Si Φ_F est un automorphisme, en particulier, il existe $G = \dfrac{P}{Q}$ (avec $P \wedge Q = 1$) tel que $\Phi_F(G) = X$. On note $F = \dfrac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$.[1]
Si on note $P = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ (avec p et q les degrés de P et Q), on peut transformer $G \circ F = X$ en $P \circ F = X(Q \circ F)$, puis en $\sum_{j=0}^{p} a_j F^j = X \sum_{k=0}^{q} b_k F^k$.
On a donc $\sum_{j=0}^{p} a_j \dfrac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^{q} b_k \dfrac{A^k}{B^k}$, puis en notant $m = \max(p, q)$, on obtient $\sum_{j=0}^{p} a_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{q} b_k A^k B^{m-k}$.
• Avec l'égalité précédente, on obtient en particulier que $A | (a_0 - b_0 X) B^m$, donc par Gauss, $A | a_0 - b_0 X$. Le couple (a_0, b_0) n'est pas nul, sinon $X | P$ et $X | Q$, donc $P \wedge Q \neq 1$.
On a donc $\deg(A) \leqslant 1$.

• On opère maintenant le même travail pour les puissances maximales de notre égalité.

— Si $m = q = p$, alors $B | a_p - b_p X$ et le couple (a_p, b_p) est non nul car p est le degré exact de A et B.
— Si $m = q > p$, $B | b_q X$ et $b_q \neq 0$.
— Si $m = p > q$, $B | a_p$ et $a_p \neq 0$.

Dans tous les cas, $\deg(B) \leqslant 1$.
On en déduit que F est de la forme $F = \dfrac{aX + b}{cX + d}$. Puis comme F ne peut être constant (sinon Φ_F n'est pas surjectif), on a $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, c'est à dire $ad - bc \neq 0$.

• Réciproquement, montrons que Φ_F est un automorphisme si F est une homographie. On note dorénavant $\Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ (équivalent à dire $ad - bc \neq 0$), le morphisme qui à X associe $\dfrac{aX + b}{cX + d}$.
On remarque alors que pour deux matrices M et N inversibles, on a $\Phi_M \circ \Phi_N = \Phi_{NM}$. Donc comme les matrices sont inversibles, on connaît l'inverse de Φ_M : c'est $\Phi_{M^{-1}}$.
On vient donc de montrer que $\Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ était bien un automorphisme.

1. Choisir des représentants irréductibles est possible car F et G ne peuvent être nuls, sinon Φ n'est pas un automorphisme.

$\rightarrow$ L'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$ est donc l'ensemble des Φ_M avec $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

• Francinou-Gianella : on a même montré mieux !

Introduisons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \Phi_{M^{-1}} \end{array}$ avec la notation $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(X) : \mathbb{K})$ pour désigner l'ensemble des $\mathbb{K}$-automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.
On remarque que $\varphi(I_2) = Id_{\mathbb{K}(X)}$, donc par le travail précédent, φ est un morphisme de groupes surjectif.[2]
De plus, son noyau est $\mathbb{K}^* I_2$. Le premier théorème d'isomorphisme donne alors

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})/\mathbb{K}^* I_2 = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \quad .$$

Les automorphismes sont donc bien les homographies ! $\square$

Remarques : • Comment tracer le graphe d'une fonction homographique ?
Soit $c = 0$ et c'est une droite.
Soit $c \neq 0$, on met notre fonction sous la forme canonique $f(x) = \dfrac{\alpha}{x - \beta} + \gamma$, alors le graphe est l'hyperbole $\dfrac{\alpha}{x}$ centré au point (β, γ).

2. Attention, il y a une erreur dans le FGN, ils disent que $\Phi_M \circ \Phi_N = \Phi_{MN}$, ce qui est faux ! Le morphisme φ qu'ils construisent est un antimorphisme ! En associant $\Phi_{M^{-1}}$ à M, on règle ce problème. (voir Szpirglas)