

Faire des mathématiques avec du fil et des clous !

Adrien Laurent

December 27, 2018

1 Règles du jeu et notions de géométrie différentielle

Dans ce document, on essaiera de relier des clous préalablement plantés intelligemment avec des fils. On peut bien sûr remplacer les clous par des points sur une feuille et les fils par des segments tracés avec de jolies couleurs. Le but du jeu est de faire apparaître avec des fils (des segments de droite) de nouvelles formes. On donne souvent le nom d'art filaire (*string art* chez Shakespeare) aux formes ainsi créées.

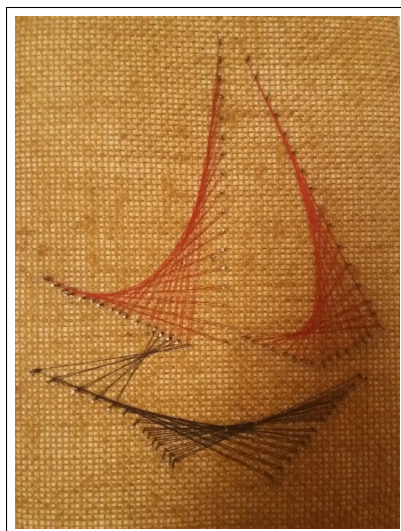


Figure 1: Un joli bateau fait par ma mère, Christiane Laurent.

Ici on donnera les méthodes de construction au fil et au clou de certaines courbes et surfaces bien connues, puis on confirmera par la preuve les observations faites.

L'explication mathématique des phénomènes observés est la suivante. Quand on relie des clous avec des fils, on trace des tangentes à une courbe. Cette courbe est dite enveloppée et l'ensemble de ses tangentes est l'enveloppe. Donnons-nous une courbe¹ \mathcal{C} sur \mathbb{R}^2 définie par $g(x, y) = 0$ avec g de classe \mathcal{C}^1 . Par exemple, le cercle de rayon R centré en (x_0, y_0) suit l'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$. Pour trouver l'équation de la tangente au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, on va écrire un développement de g à l'ordre 1. On a

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g'(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \mathcal{O}(\|(x - x_0, y - y_0)\|^2).$$

¹Pour simplifier, on oubliera les singularités.

Or $g(x_0, y_0) = 0$. Donc une approximation linéaire de la courbe \mathcal{C} en (x_0, y_0) est

$$g'(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

C'est justement l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) (en supposant $g'(x_0, y_0)$ de rang 1). Pour trouver la courbe enveloppée par un ensemble de droites, il faut donc trouver l'équation de ces droites, puis trouver la fonction g définissant une courbe dont les tangentes coïncident avec cet ensemble de droites. C'est ce que nous ferons dans ce document pour quelques cas particuliers. Une méthode d'approche est la suivante.

Méthode. On se donne un ensemble Ω de droites D_t indexées par un paramètre $t \in I$ avec I un intervalle de \mathbb{R} et mises sous la forme

$$D_t : a(t)x + b(t)y = c(t).$$

On suppose les coefficients a , b et c de classe \mathcal{C}^1 et tels que $a(t)b'(t) - a'(t)b(t)$ ne s'annule pas sur I . Alors, la courbe \mathcal{C} enveloppée par Ω est

$$\mathcal{C} = \left\{ (x(t), y(t)) = \left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}(t), \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}(t) \right), t \in I \right\}.$$

Pour obtenir une équation cartésienne de \mathcal{C} à partir de la paramétrisation obtenue, on peut utiliser le résultant (pour des détails et exemples sur la théorie de l'élimination, voir [7, 6]).

Pour obtenir ce résultat, on s'efforce de trouver le point $(x(t), y(t))$ où D_t est tangente à \mathcal{C} . Alors, la courbe \mathcal{C} sera l'ensemble de ces points. On suppose que le point $(x(t+h), y(t+h))$ est proche de $(x(t), y(t))$ quand h est petit. On calcule donc l'intersection de D_t et D_{t+h} , puis un développement de Taylor à l'ordre 1 donne la formule pour $(x(t), y(t))$. Une autre vision de ce résultat peut être trouvée dans l'excellent livre [4].

Dans la section 4, on ne regarde plus simplement des courbes dans \mathbb{R}^2 mais des surfaces de \mathbb{R}^3 . On peut aussi définir ces surfaces sous la forme $g(x, y, z) = 0$, mais on ne peut plus parler de tangente. En effet, en un point d'une surface, c'est tout un plan qui est tangent à la surface. Il est défini de même par une équation de la forme

$$g'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

où $g'(x_0, y_0, z_0)$ est de rang 1. En chaque point, il ne suffit donc plus d'une droite pour esquisser l'espace tangent, mais il en faut deux car deux droites non parallèles définissent un plan. Pour des détails ou résultats plus généraux, le lecteur pourra regarder dans les premiers chapitres des livres [5, 8].

2 Courbes enveloppées en partant de segments

Méthode. On fait deux lignes partant d'un même point et on plante des clous espacés uniformément sur celles-ci. On plante un clou à l'intersection et N clous sur chaque ligne. On numérote les clous de 0 à N sur chaque ligne en partant de l'intersection. Alors on relie par un fil le clou n de la première ligne au clou $N - n$ de la deuxième. Si on veut utiliser un seul fil, on peut relier le clou n de la première ligne au clou $N - n$ de la deuxième, puis relier au clou $n + 1$ de la première ligne, etc...

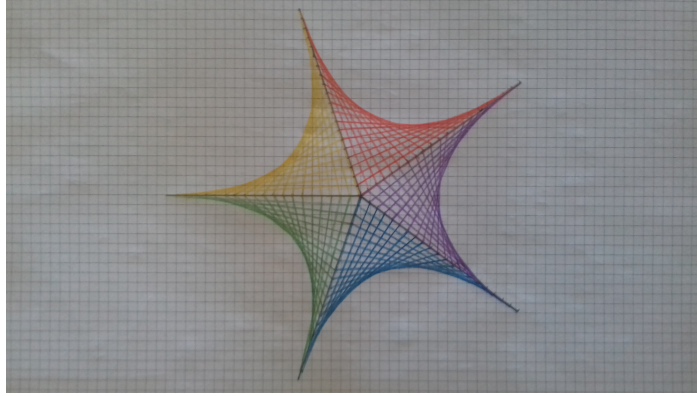


Figure 2: Bien disposées, ces paraboles donnent une illusion de volume.

La proposition suivante confirme notre intuition : la courbe enveloppée est une parabole. On peut sans perdre de généralité supposer que la distance séparant un clou et ses voisins vaut 1, ainsi que disposer les lignes de clous comme sur le dessin suivant.

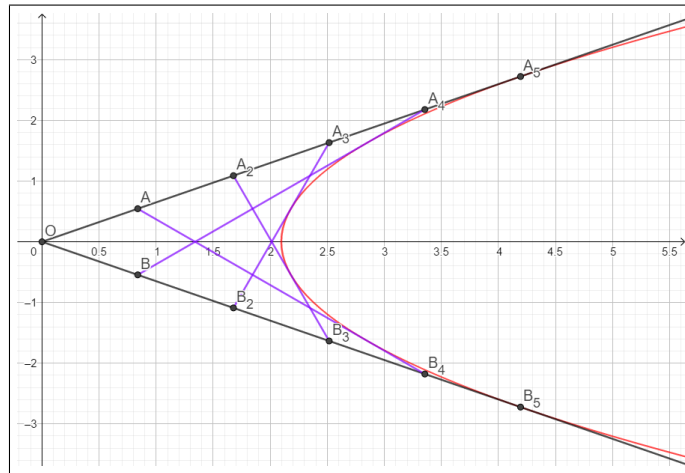


Figure 3: On peut disposer nos lignes ainsi (ici pour $N = 5$).

Proposition 2.1. *La courbe enveloppée par les segments reliant les points $(u \cos(\theta), u \sin(\theta))$ à $((N-u) \cos(\theta), -(N-u) \sin(\theta))$ pour $0 \leq u \leq N$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé est un arc de la parabole d'équation $x = \frac{N \cos(\theta)}{2} + \frac{\cos(\theta)}{2N \sin^2(\theta)} y^2$.*

Proof. On note $t = \frac{u}{N}$, alors, l'équation de la droite passant par les points $(u \cos(\theta), u \sin(\theta))$ et $((N-u) \cos(\theta), -(N-u) \sin(\theta))$ est

$$(2t - 1) \cos(\theta)y - \sin(\theta)x + 2Nt(1 - t) \cos(\theta) \sin(\theta) = 0. \quad (2.1)$$

Du côté de la parabole d'équation $x = \frac{N \cos(\theta)}{2} + \frac{\cos(\theta)}{2N \sin^2(\theta)} y^2$, la tangente au point $(\frac{N \cos(\theta)}{2} + \frac{\cos(\theta)}{2N \sin^2(\theta)} y_0^2, y_0)$ est (quitte à multiplier par $\sin(\theta)$)

$$\frac{\cos(\theta)y_0}{N \sin(\theta)} y - \sin(\theta)x + \frac{N}{2} \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{\cos(\theta)y_0^2}{2N \sin(\theta)} = 0. \quad (2.2)$$

En choisissant $y_0 = N(2t - 1) \sin(\theta)$, les deux équations de droites (2.1) et (2.2) coïncident. Donc la courbe enveloppée est bien un arc de parabole. \square

On peut étendre la construction en espaçant différemment les clous sur chaque ligne. On peut aussi ne pas partir d'un même clou, en reliant deux segments sans que le clou 0 soit commun comme dans la figure 1. On fait apparaître des paraboles dans ces deux cas. Pour trouver l'équation de la parabole, on peut utiliser la méthode décrite en section 1. Dans la proposition suivante, on donne l'équation de la parabole dans le cas des clous espacés différemment. On retrouve le résultat de la proposition 2.1 en posant $a = 1$.

Proposition 2.2. *La courbe enveloppée obtenue en reliant les points $(Nt \cos(\theta), Nt \sin(\theta))$ à $(aN(1 - t) \cos(\theta), -aN(1 - t) \sin(\theta))$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé est un arc de la parabole \mathcal{P} d'équation*

$$\mathcal{P} : \begin{cases} (a - 1)^2 \sin^2(\theta)x^2 + (a + 1)^2 \cos^2(\theta)y^2 + (a^2 - 1) \sin(2\theta)xy \\ -2a(a + 1)N \sin(\theta) \sin(2\theta)x - 4a(a - 1)N \sin(\theta) \cos^2(\theta)y + a^2 N^2 \sin^2(2\theta) = 0 \end{cases} .$$

Si le lecteur veut faire les calculs intermédiaires, on trouve la paramétrisation de \mathcal{P} donnée par

$$\begin{cases} x(t) = N((a + 1)t^2 - 2at + a) \cos(\theta) \\ y(t) = -N((a - 1)t^2 - 2at + a) \sin(\theta) \end{cases} .$$

Pour éliminer la variable t et obtenir l'équation cartésienne, on calcule le résultant

$$R(x, y) = \begin{vmatrix} N(a + 1) \cos(\theta) & 0 & N(1 - a) \sin(\theta) & 0 \\ -2Na \cos(\theta) & N(a + 1) \cos(\theta) & 2Na \sin(\theta) & N(1 - a) \sin(\theta) \\ Na \cos(\theta) - x & -2Na \cos(\theta) & -Na \sin(\theta) - y & 2Na \sin(\theta) \\ 0 & Na \cos(\theta) - x & 0 & -Na \sin(\theta) - y \end{vmatrix}$$

et la parabole est l'ensemble des points d'annulation de $R(x, y)$.

3 Courbes enveloppées en partant d'un cercle

Ici on va positionner les clous en cercle. Il faut donc s'armer d'un compas et d'un rapporteur (et de patience). De préférence, il vaut mieux prendre un nombre de clous divisibles par beaucoup d'entiers : un multiple de 30 par exemple.

3.1 Dessiner des cercles concentriques

Méthode. *Le cercle est la figure de base. Pour l'obtenir, il faut prendre un clou, choisir un pas p (de préférence premier avec le nombre de clous N), puis on relie le clou 1 au clou $p + 1$, puis au clou $2p + 1$, etc...*

Dans la figure 4, on a pris $N = 120$ clous et un pas p égal à 29 pour le cercle jaune et 41 pour le cercle noir.

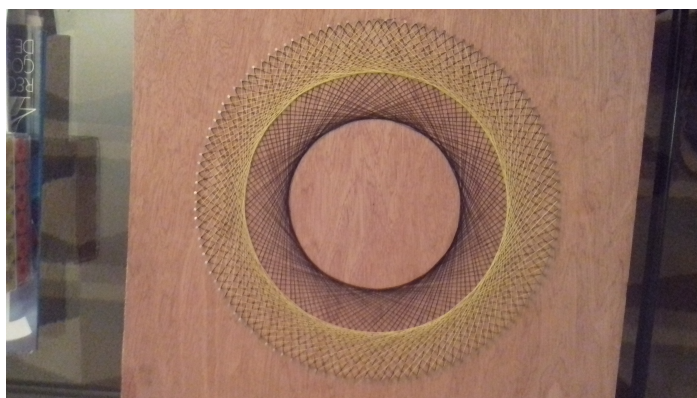


Figure 4: 2 cercles concentriques.

Si p n'est pas premier avec N , on devra utiliser plusieurs fils, ce qui peut aussi être une occasion pour changer de couleur. On devra utiliser $\text{pgcd}(p, N)$ fils différents. Par exemple, pour $N = 60$ et $p = 20$, on devra utiliser 20 fils différents reliant chacun 3 clous.

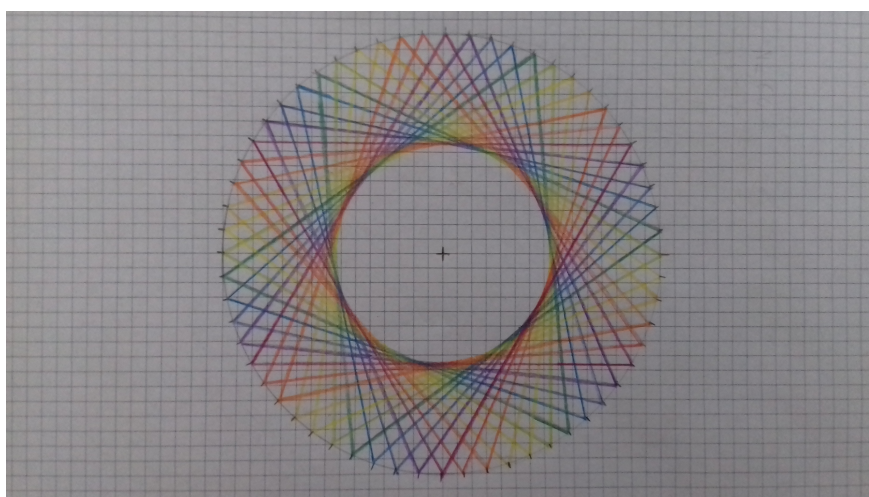


Figure 5: Cercles concentriques colorés avec des étoiles à 6 branches (ou des triangles).

On remarque que plus p s'approche de $N/2$, plus le rayon du cercle créé tend vers 0. Quel est donc le pas p correspondant à un rayon r voulu pour le cercle tracé ?

Proposition 3.1. *Si le cercle de clous est de rayon 1 et possède N clous, alors, pour obtenir un cercle tracé de rayon proche de $r < 1$, il faut choisir le pas p comme l'entier le plus proche de $\frac{N \arccos(r)}{\pi}$.*

Proof. Si on relie les points $A = (1, 0)$ et $B = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ par une corde. Il suffit de considérer cette corde pour des raisons de symétrie. Alors, le cercle de rayon r formé par toutes les cordes faisant l'angle θ est tangent à chaque corde en leur milieu. En effet le triangle OAB est isocèle en O , donc la droite (OI) avec I milieu de $[AB]$ est orthogonale à (AB) , donc (AB) est tangente au cercle en I . Le rayon r est donc la distance

de O à I , c'est à dire

$$r^2 = \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos(\theta)}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donc $r = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\theta = 2 \arccos(r)$ est l'angle correspondant. Puis l'angle parcouru par le fil reliant le clou n au clou $p + n$ vaut $\frac{2p\pi}{N}$, d'où le résultat. \square

3.2 Dessiner des ellipses

Méthode. On choisit un diamètre du cercle de clous, ainsi que deux points équidistants du centre F_1 et F_2 qui seront les foyers de notre ellipse. Pour chaque clou, on pose l'angle droit d'une équerre sur le clou et un côté doit passer par F_1 . Alors le fil doit relier le clou à un autre suivant l'autre côté de l'équerre (si il y a un autre clou sur cette droite). Il peut être nécessaire de rajouter des clous ou au moins de bien prévoir leurs emplacements pour avoir assez de droites pour voir l'ellipse. On fait ensuite le même tracé avec F_2 .

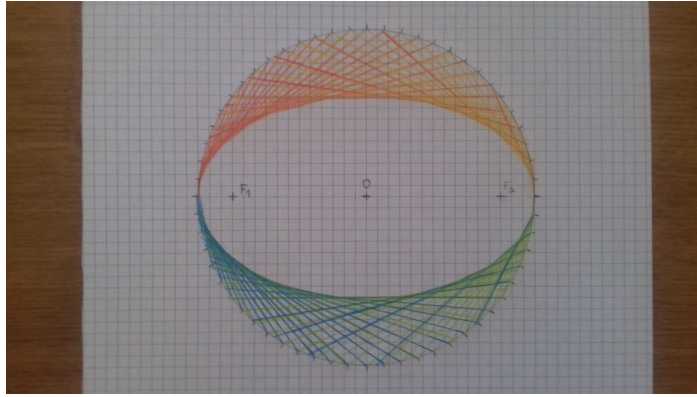


Figure 6: L'ellipse est l'antipodaire du cercle par rapport à F_1 ou F_2 .

En fait, on trace la courbe enveloppée par les perpendiculaire à toutes les droites (FM) passant par M où M est sur le cercle et F est un foyer de l'ellipse. La courbe dessinée ainsi est appelée l'antipodaire du cercle par rapport au foyer F . Si on abandonne les clous et le fil pour reprendre un simple crayon, on peut tracer des hyperboles et paraboles (voir sur les sites [2, 3] pour des détails et des animations). Aussi, en construisant l'antipodaire d'autres courbes que le cercle, on accède à un bestiaire infini de courbes faciles à dessiner, comme le deltoïde, la cardioïde, des cubiques, des spirales, etc...

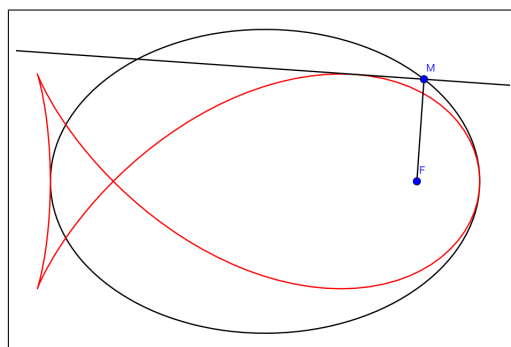


Figure 7: L'antipodaire d'une ellipse par rapport à son foyer est un joli poisson.

3.3 Dessiner des épicycloïdes

Mais qu'est donc une épicycloïde ? Si l'on fait tourner un cercle autour d'un autre, et que l'on trace la trajectoire d'un point fixé sur le cercle extérieur, alors la figure obtenue est une épicycloïde (voir figure 8). C'est un cas particulier d'épitréroïde, les figures que l'on obtient avec un spirographe avec disque extérieur en faisant tourner un disque autour d'un cercle et en traçant la trajectoire d'un point sur ce disque. Il s'avère que si l'on considère les orbites des planètes autour du soleil comme étant circulaires et coplanaires, alors le mouvement de deux planètes l'une par rapport à l'autre donne une épitréroïde.

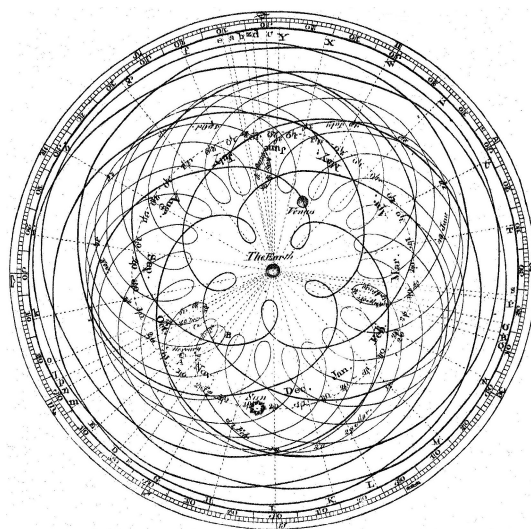
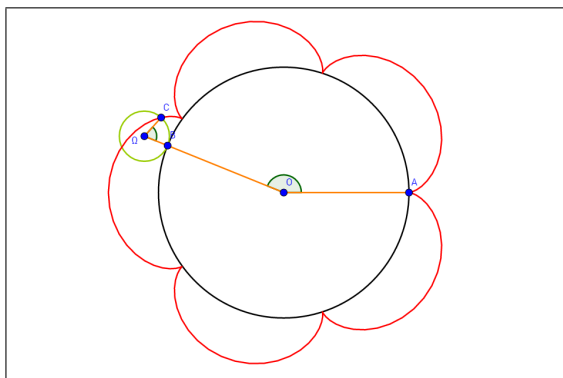


Figure 8: À gauche : définition de l'épicycloïde avec un cercle tournant autour d'un autre. À droite : une épitréroïde décrivant la trajectoire de Vénus autour de la Terre.

Une définition plus formelle des épicycloïdes est donnée par la paramétrisation cartésienne suivante :

$$\begin{cases} x(\varphi) = \frac{1}{q+2}((q+1)\cos(\varphi) + \cos((q+1)\varphi)), \\ y(\varphi) = \frac{1}{q+2}((q+1)\sin(\varphi) + \sin((q+1)\varphi)), \end{cases} \quad (3.1)$$

où q est un réel positif ou nul.² Le cas particulier où q est entier donne des courbes fermées et ce sont ces courbes que nous chercherons à obtenir. L'entier q désigne alors le nombre de points de rebroussements de la courbe. On reconnaîtra en particulier la cardioïde pour $q = 1$ et la néphroïde pour $q = 2$, des courbes chères aux mathématiciens contemplant leur chocolat chaud le matin...



Figure 9: La cardioïde du matin.

Méthode. On peut obtenir aisément des épicycloïdes en partant d'un cercle grâce à la génération de Crémona. Pour cela il faut que le nombre de clous soit divisible par q . Puis on dessine une corde dont une extrémité avance $q + 1$ fois plus vite que l'autre. On relie les clous n et $(q + 1)n$ (modulo le nombre de clous). Pour n'utiliser qu'un seul long fil, on peut faire le chemin approximatif suivant : $1 - q+1 - 2 - 2(q+1) - 3 - \dots$

Théorème 3.2 (Cremona). La courbe enveloppée par les cordes reliant les points $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ et $(\cos((q + 1)\varphi), \sin((q + 1)\varphi))$ pour $\varphi \in [0, 2\pi[$ est l'épicycloïde d'indice q .

Proof. Cherchons d'abord l'équation de la tangente au point $(x(\varphi), y(\varphi))$ à la courbe définie par la paramétrisation (3.1). On remarque que φ n'est pas l'angle du point $(x(\varphi), y(\varphi))$. L'équation de la tangente est donnée par $y'(\varphi)(X - x(\varphi)) - x'(\varphi)(Y - y(\varphi)) = 0$. En simplifiant, cela donne

$$\cos\left(\frac{q+2}{2}\varphi\right)\cos\left(\frac{q}{2}\varphi\right)X + \sin\left(\frac{q+2}{2}\varphi\right)\cos\left(\frac{q}{2}\varphi\right)Y = \cos^2\left(\frac{q}{2}\varphi\right).$$

Donc si $\varphi \notin \frac{\pi}{q} + \frac{2\pi}{q}\mathbb{Z}$ (on enlève les points de rebroussements), la tangente est donnée par

$$\cos\left(\frac{q+2}{2}\varphi\right)X + \sin\left(\frac{q+2}{2}\varphi\right)Y = \cos\left(\frac{q}{2}\varphi\right). \quad (3.2)$$

D'un autre côté, regardons quelle est l'équation de la corde reliant les points $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ et $(\cos((q + 1)\varphi), \sin((q + 1)\varphi))$. Après quelques calculs, on trouve exactement l'équation (3.2). Les tangentes de l'épicycloïde sont donc bien les cordes dessinées. \square

²Pour simplifier, ces équations ne décrivent que les épicycloïdes inscrites dans le cercle unité.

Pour construire des q -épicycloïdes avec $q = \frac{q_1}{q_2}$ rationnel, on peut faire avancer une extrémité de la corde à vitesse q_1 et l'autre à la vitesse q_2 .

Et voilà ! À présent, on sait construire de jolies épicycloïdes comme la courbe rouge sur la Figure 10, dont la forme rappelle celle de quelques vitraux gothiques du plus bel effet.

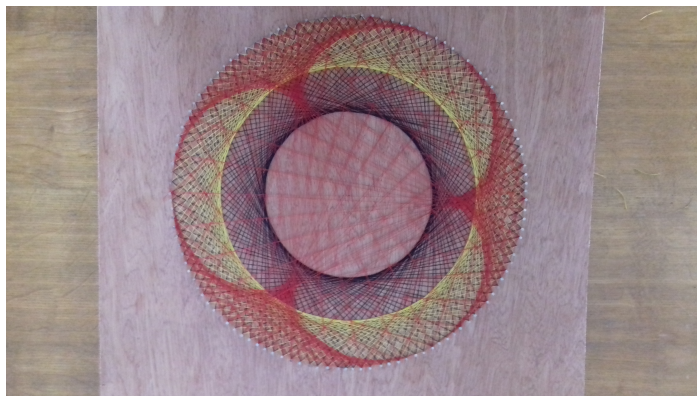


Figure 10: Une 3-épicycloïde et deux cercles.

4 Quelques surfaces enveloppées

Ici, on va tenter de faire apparaître des surfaces avec du fil et des clous. Pour obtenir un résultat non trivial, il faut créer un mobile en 3 dimensions, et surtout ne pas cacher la surface enveloppée par les fils ou le mobile. Par exemple, on pourrait faire apparaître des sphères concentriques en partant d'un mobile sphérique, mais on ne verrait pas le résultat, ce qui enlève un intérêt certain au jeu...

4.1 Le parabololoïde hyperbolique

Méthode. *Pour le mobile, il faut quatre tiges de bois de longueur égale que l'on attache ensemble comme sur la figure 11. Il faut juste que l'angle entre deux bâtons attachés soit égal à l'angle entre les deux autres bâtons (un peu comme un losange mais en 3d).*

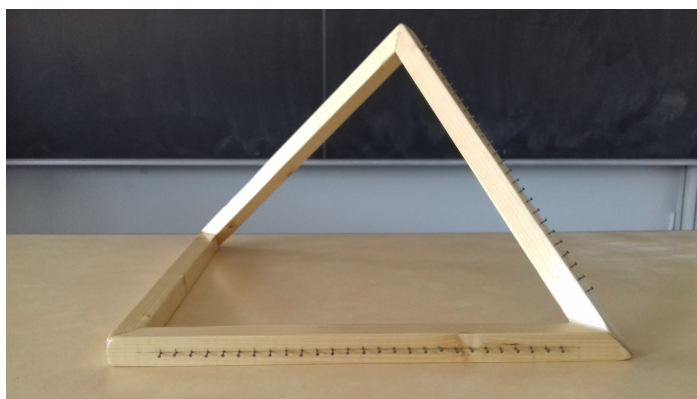


Figure 11: Mobile du parabololoïde hyperbolique fait à l'aide de mon père, Philippe Laurent.

On plante des clous espacés également sur le pourtour du mobile. Puis on relie chaque clou à celui placé sur le bâton opposé au même endroit. Au final, on voit le parabolöide hyperbolique apparaître. C'est une surface ressemblant un peu à une selle de cheval (ou à une chips pour les gourmands).

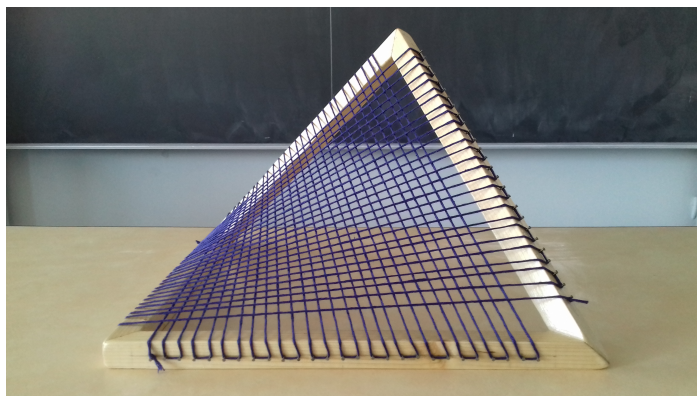


Figure 12: Un parabolöide hyperbolique sauvage apparaît.

Proposition 4.1. *La surface enveloppée par les droites passant par les points $((1-t)a, tb, 1-2t)$ et $(-ta, -(1-t)b, 2t-1)$, ainsi que les points $((1-t)a, -tb, 1-2t)$ et $(-ta, (1-t)b, 2t-1)$ pour $t \in [0, 1]$ est le domaine du parabolöide hyperbolique d'équation $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ défini sur $\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \leq 1$.*

Proof. Le plan tangent au parabolöide hyperbolique au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$z = \frac{2x_0}{a^2}x - \frac{2y_0}{b^2}y - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (4.1)$$

On va montrer que la droite reliant les points $((1-t)a, tb, 1-2t)$ et $(-ta, -(1-t)b, 2t-1)$ est incluse dans ce plan en un certain point (x_0, y_0, z_0) . Le raisonnement est le même pour les droites reliant les points $((1-t)a, -tb, 1-2t)$ et $(-ta, (1-t)b, 2t-1)$. Une paramétrisation de la droite D_t est

$$\{(1-t-u)a, (t-u)b, (1-2t)(1-2u)\}, u \in \mathbb{R}.$$

En insérant cette paramétrisation dans (4.1), on trouve

$$(1-2t)(1-2u) = \frac{2(1-t-u)x_0}{a} - \frac{2(t-u)y_0}{b} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (4.2)$$

Pour $u = t$ et $u = 1-t$, on a

$$\begin{cases} (1-2t)^2 &= \frac{2(1-2t)x_0}{a} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}, \\ -(1-2t)^2 &= -\frac{2(2t-1)y_0}{b} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on déduit donc que $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 1-2t$. Alors, pour tous (x_0, y_0, z_0) du parabolöide hyperbolique tels que $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 1-2t$, on montre par

calcul que l'équation (4.2) est satisfaite pour tout u , donc la droite D_t reliant les points $((1-t)a, tb, 1-2t)$ et $(-ta, -(1-t)b, 2t-1)$ est incluse dans le plan tangent en ces points (x_0, y_0, z_0) . En reliant les deux autres points $((1-t)a, -tb, 1-2t)$ et $(-ta, (1-t)b, 2t-1)$, on aboutirait à l'équation $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 - 2t$. Puis, pour tous (x_0, y_0, z_0) du paraboloidé hyperbolique avec $\frac{|x_0|}{a} + \frac{|y_0|}{b} \leq 1$, il existe $(t, t') \in [0, 1]^2$ tels que $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 1 - 2t$ et $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 - 2t'$. Donc on détermine exactement le plan tangent grâce à deux droites non parallèles lui appartenant. Donc le paraboloidé hyperbolique est bien la surface enveloppée recherchée. \square

4.2 L'hyperboloïde à une nappe

Méthode. *On prend deux cercles placés dans deux plans parallèles et tel que la droite reliant leurs deux centres soit orthogonale aux deux plans. On peut les attacher ensemble dans cette position par le centre par exemple avec des tiges en fer. On dispose ensuite des clous autour des deux cercles régulièrement espacés, puis on relie les clous des deux cercles en avançant à la même vitesse. En particulier, si les deux cercles ont même rayon, et si on relie les clous en face l'un de l'autre, on obtient un cylindre.*

Cette construction assez intuitive de l'hyperboloïde à une nappe est très utilisée en architecture, notamment dans l'édification de certains châteaux d'eau et des tours de refroidissements des centrales nucléaires. On peut aussi citer les fameuses tours de Vladimir Choukhov (1853 – 1939). Pour plus de détails à ce sujet, le lecteur peut consulter le site [1].



Figure 13: La tour Choukhov à Moscou dont chaque portion est un morceau d'hyperboloïde.

Voici une preuve de ce résultat dans le cas où les deux cercles ont même rayon.

Proposition 4.2. *En reliant les points $(R \cos(\theta - \varphi), R \sin(\theta - \varphi), -Z)$ et $(R \cos(\theta + \varphi), R \sin(\theta + \varphi), Z)$ pour tous $\theta \in [0, 2\pi[$ et où $R > 0$, $Z > 0$ et $\varphi \in [0, \pi/2[$ sont fixés,*

on obtient exactement la portion comprise entre $-Z$ et Z de l'hyperboloïde à une nappe d'équation $\frac{x^2+y^2}{R^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{z^2}{Z^2} \left(\frac{1}{\cos^2(\varphi)} - 1 \right) + 1$.

Proof. Le segment D_θ reliant les points $(R \cos(\theta - \varphi), R \sin(\theta - \varphi), -Z)$ et $(R \cos(\theta + \varphi), R \sin(\theta + \varphi), Z)$ est donné par la paramétrisation

$$\{(R((1-u) \cos(\theta - \varphi) + u \cos(\theta + \varphi)), R((1-u) \sin(\theta - \varphi) + u \sin(\theta + \varphi)), (2u-1)Z), u \in [0, 1]\}.$$

En injectant cette paramétrisation dans l'équation de l'hyperboloïde, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{R^2 \cos^2(\varphi)} + \frac{z^2}{Z^2} \left(1 - \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \right) - 1 &= \frac{(1-u)^2 + u^2 + 2u(1-u) \cos(2\varphi)}{\cos^2(\varphi)} + (2u-1)^2 \left(1 - \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \right) - 1 \\ &= 2u(1-u) \frac{\cos(2\varphi) + 1 - 2 \cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = 0 \end{aligned}$$

Tous les segments tracés sont donc inclus dans la portion d'hyperboloïde.

Le fait que la portion d'hyperboloïde soit exactement engendré par les segments provient du fait que le point

$$\left(R \sqrt{\cos^2(\varphi) + \frac{\tilde{z}^2}{Z^2} (1 - \cos^2(\varphi))} \cos(\tilde{\theta}), R \sqrt{\cos^2(\varphi) + \frac{\tilde{z}^2}{Z^2} (1 - \cos^2(\varphi))} \sin(\tilde{\theta}), \tilde{z} \right)$$

peut se réécrire sous la forme $(R((1-u) \cos(\theta - \varphi) + u \cos(\theta + \varphi)), R((1-u) \sin(\theta - \varphi) + u \sin(\theta + \varphi)), (2u-1)Z)$ pour $u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{z}}{Z} \right)$ et $\theta = \tilde{\theta} + \arctan((1-2u) \tan(\varphi))$. \square

References

- [1] Le site du mathouriste. <http://www.mathouriste.eu>.
- [2] Mathcurve. <https://www.mathcurve.com>.
- [3] Mathématiques magiques. <http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr>.
- [4] M. Audin. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006.
- [5] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble (PUG), 1997.
- [6] J.-Y. Mérindol. *Nombres et algèbre*. EDP sciences, 2006.
- [7] P. S. Picart. *Cours de calcul formel algorithmes fondamentaux*. 1999.
- [8] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2ème édition revue et augmentée édition, 2003.