Théorème de Cauchy-Lipschitz

Références : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, p 132-133 et 141-142
http://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/agreg/cours_edo_agreg_fboyer.pdf

Théorème.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.
Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème de Cauchy suivant admet une unique solution maximale.

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Démonstration. • Cylindre de sécurité [1]
Comme I et Ω sont ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$.
Comme f est localement lipschitzienne en la seconde variable, on peut choisir r_0 assez petit pour que f soit k-lipschitzienne sur C_0.
De plus, sur C_0, f est bornée par une constante M.
Soit $T \leqslant T_0$, et y une solution du problème de Cauchy définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ au temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors, par continuité,

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) \mathrm{d}u \right\| \leqslant TM.$$

Donc si $T \leqslant \min\left(T_0, \dfrac{r_0}{M}\right)$, alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.
On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$.

• Existence locale de la solution
On note $\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ [2] et pour $y \in \mathcal{F}$, on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) \mathrm{d}u.$$

Comme $\mathcal{F}$ muni de la norme uniforme est une partie complète, et comme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, on va appliquer un théorème de point fixe.
Soient y_1, $y_2 \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} |\phi(y_1) - \phi(y_2)|(t) &= \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u))\right) \mathrm{d}u \right| \\ &\leqslant k \int_{t_0}^{t} |y_1(u) - y_2(u)| \, \mathrm{d}u \\ &\leqslant kT \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

Donc $\|\phi(y_1) - \phi(y_2)\| \leqslant kT \|y_1 - y_2\|$. Et en particulier, si on choisit $T < \dfrac{1}{k}$, alors ϕ est **contractante**.
On a donc existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

• Unicité locale
Soient y_1 et y_2 deux solutions définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$.
Soit $J = \{t \in I_1 \cap I_2, y_1(t) = y_2(t)\}$, on va montrer que $J = I_1 \cap I_2$ par connexité.
On sait déjà que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset J$ par l'unicité vue précédemment, donc J est **non vide**.
Comme $J = (\widetilde{y_1} - \widetilde{y_2})^{-1}(0)$ (en notant $\widetilde{y_i}$ la restriction de y_i à $I_1 \cap I_2$), J est **fermé**.
Soit $t_1 \in J$, alors y_1 et y_2 sont solutions du nouveau problème de Cauchy

$$(P') : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_1) = y_1(t_1) \end{cases}$$

1. Faire un dessin.
2. Ce n'est pas un espace vectoriel !!! C'est un fermé dans un complet néanmoins.

En adaptant le début de la preuve, on voit qu'on a égalité de y_1 et y_2 sur un voisinage $[t_1 - T', t_1 + T']$ de t_1. Donc J est **ouvert**.

Comme $I_1 \cap I_2$ est connexe, on a $J = I_1 \cap I_2$, ce qui donne l'unicité locale.

• Construction de la solution maximale

On considère $J = \bigcup_{(\tilde{I},y)\in S} \widetilde{I}$ avec S l'ensemble des $(\widetilde{I}, y)$ solution du problème de Cauchy. On définit alors y^* sur J par $y^*(x) = y(x)$ si $(\widetilde{I}, y)$ est solution et $x \in I$. On peut faire ça par unicité locale.
La solution y^* est ainsi maximale. $\square$

Remarques : • Si la condition local-lipschitz n'est pas vérifiée, on n'a plus l'unicité.

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On trouve à ce problème une infinité de solutions de la forme $y(t) = \frac{(t-t_0)^2}{4}\mathbb{1}_{[t_0,+\infty[}(t)$.
• Si f est seulement continue, le théorème de Cauchy-Arzela-Peano donne l'existence d'une solution. Ce théorème se prouve avec Ascoli et Schauder.