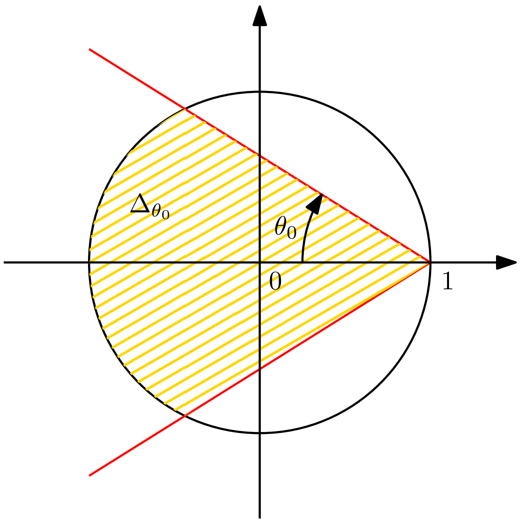
Théorèmes d'Abel et taubérien faible

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*, p 249-251
Chambert-Loir, *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation 1*, 6.3

Théorème (Théorème d'Abel)**.**

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in B(0,1),\ \exists \rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ tels que $1 - z = \rho e^{i\theta}\}$,
alors $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$.



Le domaine Δ_{θ_0}

Démonstration. Soient $S = \sum a_n$ et $R_n = \sum_{k>n} a_k$, on a $a_n = R_{n-1} - R_n$.
Soit $z \in B(0,1)$, alors $f(z) - S = \sum a_n(z^n - 1) = \sum (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = (z-1)\sum R_n z^n$.
Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N tel que $\forall n \geqslant N$, $|R_n| < \varepsilon$.
Alors $|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + \varepsilon|z-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$.

Soit $\alpha > 0$ tel que $|z-1| < \alpha \Rightarrow |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$.

Il ne reste donc plus qu'à majorer $\frac{|z-1|}{1-|z|}$.
On prend $z \in \Delta_{\theta_0}$, donc z est de la forme $1 - \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $|\phi| \leqslant \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$.
D'où $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\phi) - \rho^2}(1+|z|) \leqslant \frac{2}{2\cos(\phi) - \rho} \leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \rho}$.
Si on pose $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$, on a $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}$.
Conclusion : si on prend $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leqslant \min(\alpha, \cos(\theta_0))$, on a $|f(z) - S| \leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$.
Donc $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = S = \sum_{n\geqslant 0} a_n$. □

Applications : • $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge comme série alternée grâce au critère de Leibniz.

D'où $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$ en appliquant sur la droite réelle le théorème ($\theta_0=0$).

• De même, on a $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)$.

On va maintenant démontrer une réciproque partielle du théorème d'Abel dans le cas où $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ et où on ne demande que la convergence avec $\theta_0=0$.

Théorème (Théorème taubérien faible (Alfred Tauber))**.**

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geqslant 1$ et f sa somme sur le disque unité de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe S dans $\mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=S$, alors si $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n$ converge et $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.

Démonstration. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$. Le but est de faire converger S_n vers S. Soit donc $\varepsilon>0$.

Sur $B(0,1)$, on a $S_n-f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k$.

Or $(1-x^k)=(1-x)(1+x+...+x^{k-1})\leqslant(1-x)k$, donc

$|S_n-f(x)|\leqslant(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k|a_k|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k|a_k|}{n+1}|x|^k$.

Puis $(k|a_k|)_k$ converge (vers 0) donc on peut choisir un majorant M de cette suite. On peut aussi choisir N_0 tel que $\forall k\geqslant N_0,\ k|a_k|<\varepsilon^2$.

On a $\forall n\geqslant N_0$, $|S_n-f(x)|\leqslant(1-x)M(n+1)+\displaystyle\frac{\varepsilon^2}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|x|^k\leqslant(1-x)M(n+1)+\frac{\varepsilon^2}{(n+1)(1-|x|)}$.

Donc $\left|S_n-f\left(1-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right|\leqslant(M+1)\varepsilon$.

Pour finir, $f(x)$ converge vers S quand $x\to 1$, donc il existe $N_1\geqslant N_0$ tel que $|f(1-\frac{\varepsilon}{n+1})-S|<\varepsilon$, $\forall n\geqslant N_1$.

Conclusion : $|S_n-S|\leqslant|S_n-f(1-\frac{\varepsilon}{n+1})|+|f(1-\frac{\varepsilon}{n+1})-S|\leqslant(M+2)\varepsilon$. Donc S_n converge vers S. □

Remarques : • Ce théorème reste vrai si on suppose seulement $a_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien fort de Hardy-Littlewood. Il se prouve avec le théorème de Weierstrass.

• La réciproque du théorème d'Abel est fausse dans le cas général.

Par exemple, $\sum(-1)^n$ diverge et $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}\sum(-1)^nz^n=\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}$.