Théorème de Pascal

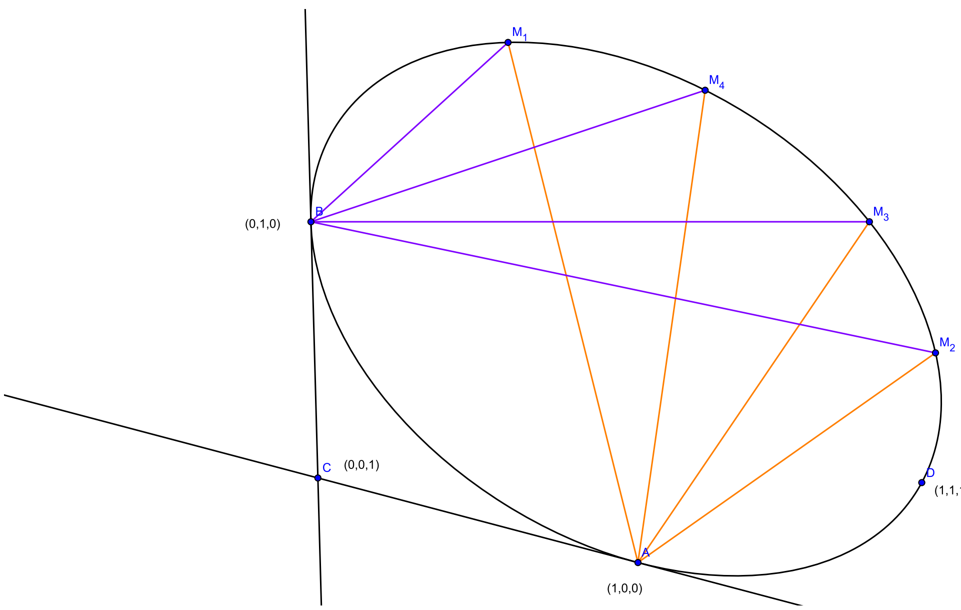
Références : Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, p 418 et p 420-421

Attention ! Ce développement utilise des notions complexes. Si on le fait, il faut préciser dans le plan ce qu'est le birapport de quatre droites concourantes, la formule du birapport dans le cas des droites utilisées ici, et le fait que les homographies de coniques sont fixées par l'image de trois points distincts.

Le birapport se définit sur une droite projective. Sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, il n'y a pas de problème, mais sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, il faut prendre les quatre points projectifs sur une droite projective. Cela revient à se fixer un point de $\mathbb{R}^2$, puis à regarder toutes les droites passant par ce point. Cela forme une droite projective. Quatre points projectifs de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ alignés sur une même droite projective sont donc quatre droites se coupant en un même point.

Proposition.

Soit $\mathcal{C}$ une conique propre et M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points sur cette conique. Alors pour tout $M \in \mathcal{C}$ différent des M_i, le birapport $[(MM_1),(MM_2),(MM_3),(MM_4)]$ garde la même valeur. On le note $[M_1, M_2, M_3, M_4]$.



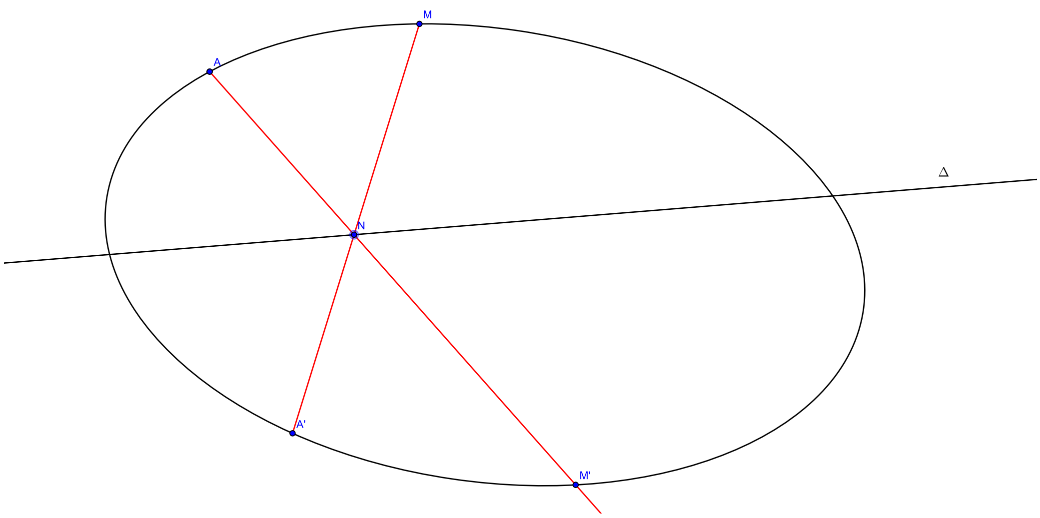
Démonstration. On se donne deux points A et B distincts sur $\mathcal{C}$ et non confondus avec les M_i, puis on construit C comme sur la figure et on prend un nouveau point D distincts des précédents n'importe où sur $\mathcal{C}$. On définit le repère projectif (A,B,C,D) : $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ et $D(1,1,1)$. Alors l'équation de la conique dans ce repère est $XY - T^2 = 0$.[1]
La droite (AM_k) a une équation de la forme $aX + bY + cT = 0$. On évalue en A pour trouver $a = 0$, puis comme la droite $T = 0$ est (AB) et $B \neq M_k$, on a $b \neq 0$. On peut donc mettre l'équation de droite sous la forme $Y - \lambda_k T = 0$. De même, les droites (BM_k) peuvent se mettre sous la forme $X - \mu_k T = 0$.
On peut montrer[2] que $[(AM_1),(AM_2),(AM_3),(AM_4)] = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$ par une formule donnant le birapport

1. Il suffit d'écrire le polynôme homogène définissant $\mathcal{C}$, d'écrire les tangentes en B et C et d'évaluer pour trouver des conditions simples sur les coefficients.
2. Ladegaillerie, p 131 : on connaît la formule en excluant le point à l'infini (on fait $T = 1$ et les équations précédentes donnent des coordonnées de points sur une droite projective.). Pour prendre en compte celui-ci, il faut faire des déterminants 2×2. Bref ça ne vaut pas le coup d'être détaillé...

sur un faisceau de deux droites. Il en va de même pour le birapport des (BM_i) et des μ_i.
Puis on remarque que les coordonnées de M_k vérifient $XY - T^2 = 0$ et $Y - \lambda_k T = 0$ donc ses coordonnées sont $(1 : \lambda_k^2 : \lambda_k)$. On a de même ses autres coordonnées avec les μ_k : $M_k(\mu_k^2 : 1 : \mu_k)$.
En comparant les coordonnées (multiplier le premier par μ_k et le second par λ_k), on s'aperçoit qu'il faut $\lambda_k \mu_k = 1$.
On pose l'homographie $h(z) = \dfrac{1}{z}$ alors $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] = [h(\lambda_1), h(\lambda_2), h(\lambda_3), h(\lambda_4)] = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]$.
Cela conclut la preuve. □

Proposition.

On appelle homographie d'une conique $\mathcal{C}$ toute bijection de $\mathcal{C}$ qui conserve le birapport.
Une homographie h d'une conique propre $\mathcal{C}$ possède un axe, c'est à dire une droite Δ telle que si on se donne $A \in \mathcal{C}$ et $A' = h(A)$, alors pour tout $M \in \mathcal{C}$, $h(M)$ est construit comme l'intersection avec $\mathcal{C}$ de la droite passant par A et par l'intersection de Δ et $(A'M)$.
Toute homographie de coniques est alors caractérisée par un couple de points homologues A et $A' = h(A)$ et l'axe de l'homographie.



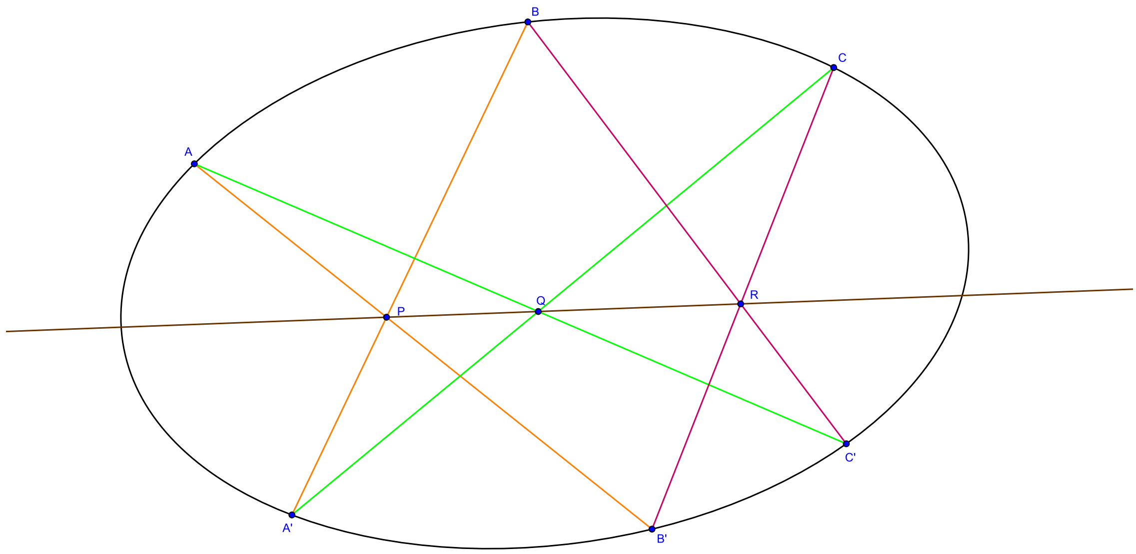
Démonstration. • Soit h une application comme définie sur le dessin. Alors h est une bijection et elle conserve le birapport. En effet, prenons quatre points distincts M_i sur $\mathcal{C}$ alors leur birapport est celui des $(A'M_i)$, donc celui des $(A'N_i)$. Puis on sait par définition du birapport que celui-ci vaut le birapport des N_i.[3] Le birapport est donc égal à celui des (AN_i) puis à celui des (AM'_i) et enfin à celui des M'_i par le même raisonnement.

• Réciproquement, soit h une homographie de la conique $\mathcal{C}$. On se donne trois points A, B, C de $\mathcal{C}$ distincts et on note A', B', C' leurs images par h. On note R l'intersection de (AB') avec $(A'B)$ et S celle de (AC') avec $(A'C)$. On appelle Δ la droite (RS). Alors h est l'homographie d'axe Δ et telle que $A' = h(A)$ car elle coïncide avec cette homographie en trois points A, B et C. □

Théorème (Hexagramme de Pascal)**.**

On se donne six points distincts A, B, C, A', B', C' dont trois ne sont pas alignés, alors ces six points sont sur une même conique propre $\mathcal{C}$ si et seulement si les intersections P, Q, R de (AB') et $(A'B)$, (BC') et $(B'C)$, (CA') et $(C'A)$ sont alignées.

3. Ladegaillerie, p 55/119, par Thalès.



Démonstration. • Si les six points sont sur un conique propre, alors il existe une unique homographie envoyant A sur A', B sur B' et C sur C'. Cette homographie peut être définie comme celle d'axe (PQ) et envoyant A sur A', ou celle d'axe (PR) et envoyant B sur B'. On a donc $(PQ) = (PR)$ donc l'axe passe par P, Q et R. Ils sont bien alignés.

• Réciproquement, on définit $\mathcal{C}$ l'unique conique propre passant par les cinq premiers points (existe car au moins trois points ne sont pas alignés), et Δ la droite passant par P, Q et R. Alors l'homographie de $\mathcal{C}$ d'axe Δ et envoyant A sur A', transforme C en le point de la droite (AC') sur $\mathcal{C}$. Puis l'homographie de $\mathcal{C}$ d'axe Δ et envoyant B sur B', transforme C en le point de la droite (BC') sur $\mathcal{C}$. Ces homographies ont même axe et envoient A sur A' : elles sont donc égales.
Les droites (AC') et (BC') s'intersectent uniquement en C', donc l'image de C par cette homographie est C', et donc C' se trouve sur $\mathcal{C}$. $\square$

Remarques : • Dans tout ce développement, je me place dans $\mathbb{R}^2$ que j'injecte dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en choisissant une droite à l'infini. Quand je ne rajoute pas projectif après les objets géométriques que j'utilise, c'est que je les considère dans $\mathbb{R}^2$.
• Je redéfinis les homographies sur un ensemble de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de même cardinal qu'une droite projective dans ce développement. On peut montrer (Ladegaillerie, p 151) que ces nouvelles homographies vérifient toujours les propriétés des "vraies" homographies, comme le fait qu'il existe une unique homographie envoyant trois points distincts sur trois autres.
• Dans le théorème de Pascal, l'ordre des points est indifférent, ce qui veut dire que d'autres intersections de droites sont aussi alignées.
• Le théorème de Pappus est l'analogue du théorème de Pascal pour une conique dégénérée en deux droites sécantes. Pour le prouver, on montre de même qu'une homographie de droites a un axe, puis le reste du raisonnement est le même.
• Si le développement est trop court (aha quelle blague !), on peut prouver que l'équation de la conique est bien $XY - T^2$, ou on peut prouver qu'une homographie de droites a un axe.