Théorème de Liapounov

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, p143

Théorème.

On se donne y une fonction de $\mathbb{R}^+$ définie comme solution du système $\left\{\begin{array}{rl} y' &= f(y) \\ y(a) &= x \end{array}\right.$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ et $f(a) = 0$. On suppose que $\Re(\mathrm{Sp}(Df(a))) \subset \mathbb{R}^{-*}$, alors a est point d'équilibre attractif du système différentiel.

On ne fera la preuve que dans le cas $a = 0$ pour simplifier.

Démonstration. On pose z la solution du système linéarisé $\left\{\begin{array}{rl} z' &= Az \\ z(0) &= x \end{array}\right.$ avec $A := Df(0)$.
L'idée de la preuve est de transporter l'asymptotique stabilité de 0 du système linéarisé pour le vrai système différentiel, et cela en créant une nouvelle norme appropriée.

- On appelle $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ les valeurs propres de A. Il existe $a > 0$ tel que pour tout i, $\Re(\lambda_i) < -a$.

On sait que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{Ker}((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut le décomposer sous la forme $x = x_1 + ... + x_k$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$.
On a $e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i} e^{t(A-\lambda_i I_n)} x_i = e^{t\lambda_i} \sum\limits_{p=0}^{m_i} \frac{t^p}{p!}(A - \lambda_i I_n)^p x_i$.
Donc en prenant une norme sous multiplicative, on a
$\left\|e^{tA}x_i\right\| \leqslant e^{t\Re(\lambda_i)} \sum\limits_{p=0}^{m_i} \frac{|t|^p}{p!} \left\|\left|A - \lambda_i I_n\right|\right\|^p \left\|x_i\right\| \leqslant e^{-at} \sum\limits_{p=0}^{m_i} \frac{|t|^p}{p!} \left\|\left|A - \lambda_i I_n\right|\right\|^p \max\limits_j \left\|x_j\right\|$.
Il vient $\left\|e^{tA}x\right\| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{p=0}^{m_i} \frac{|t|^p}{p!} \left\|\left|A - \lambda_i I_n\right|\right\|^p \right) e^{-at} \max\limits_j \left\|x_j\right\|$.
On a alors $\left\|e^{tA}x\right\| \leqslant CP(|t|)e^{-at} \left\|x\right\|$ avec P un polynôme et C une constante d'équivalence qui va bien entre les normes $\|.\|$ et $\|x\|_* := \max \|x_j\|$.

Comme $z(t) = e^{tA}x$ est la solution du linéarisé, on a $\|z(t)\| \leqslant CP(|t|)e^{-at} \|x\|$, donc 0 est un point d'équilibre attractif du linéarisé.

- On définit $b(x, y) := \int_0^\infty (e^{tA}x, e^{tA}y)\mathrm{d}t$.

Cette fonction est bien définie car $|(e^{tA}x, e^{tA}y)| \leqslant \left\|e^{tA}x\right\| \left\|e^{tA}y\right\| \leqslant C^2 e^{-2at} P(|t|)^2 \|x\| \|y\|$ qui est intégrable.
On vérifie que c'est un produit scalaire (car e^{tA} est inversible) et on pose $q(x) = b(x, x)$ la forme quadratique associée.

- On veut montrer qu'il existe α, $\beta > 0$ tels que $q(y) \leqslant \alpha \Rightarrow q(y)' \leqslant -\beta q(y)$.

→ On sait que $\nabla q(x)(y) = 2b(x, y)$ donc $\nabla q(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = \int_0^\infty 2(e^{tA}x, e^{tA}Ax)\mathrm{d}t$.
Or $2(e^{tA}x, e^{tA}Ax) = \frac{\mathrm{d}(\left\|e^{tA}x\right\|^2)}{\mathrm{d}t}$, donc $\nabla q(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$.
→ On note $r(y) = f(y) - Ay$ la "différence" entre le système étudié et le linéarisé.
Alors $q(y)' = \nabla q(y).f(y) = 2b(y, f(y)) = 2b(y, A(y)) + 2b(y, r(y))$.
Or on a vu $2b(y, A(y)) = -\|y\|^2$, donc $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$.
→ Soit $\varepsilon > 0$, on a $r(y) = f(y) - Ay = f(y) - f(0) - Df(0)y$. Par définition de la différentielle, $r(y) = o(\sqrt{q(y)})$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) \leqslant \alpha \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$ (on choisit juste d'exprimer ce fait avec la norme $\sqrt{q}$.).
On a alors par Cauchy-Schwarz : $|b(y, r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. Donc si $q(y) \leqslant \alpha$, alors $|b(y, r(y))| \leqslant \varepsilon q(y)$.

D'autre part, comme $\sqrt{q}$ et $\|.\|$ sont équivalentes, il existe C tel que $Cq(y) \leqslant \|y\|^2$.

On en déduit donc que si $q(y) \leqslant \alpha$, $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -(C-2\varepsilon)q(y)$. On note $\beta = C - 2\varepsilon$ et on choisit ε assez petit pour que $\beta > 0$.

• Pour finir, montrons que si $q(x) \leqslant \alpha$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $q(y(t)) \leqslant \alpha$. En particulier, la solution $y(t)$ sera globale car bornée.
En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait l'existence de $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \alpha$ et pour $t > t_0$ assez proche de t_0, on ait $q(y(t)) > \alpha$. Or $q(y)'(t_0) \leqslant -\beta q(y) < 0$, donc $q(y)$ est décroissante dans un voisinage de t_0 par continuité, donc ce serait absurde.

• Conclusion : si $q(x) \leqslant \alpha$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $q(y(t)) \leqslant \alpha$, donc $q(y)'(t) \leqslant -\beta q(y)(t)$. Le lemme de Gronwall donne alors $q(y)(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x)$.
Il est maintenant clair au vu de cette formule que 0 est un point d'équilibre attractif du système différentiel.

□

Remarque : • On peut prouver que si $Df(0)$ possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors 0 est instable pour le système différentiel.
• Une application de ce théorème est l'équation de Van der Pol, présente dans le X-ENS - analyse 4.
• Il est bon de connaître quelques contre-exemples sur ce sujet dans le cas où on a une valeur propre de partie réelle nulle. On en donne quelques-uns ici partant du point $(0,0)$.

— NL instable, L instable :

$$(\text{NL}) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -y^2 \end{cases} \quad \text{et (L)} : \begin{cases} X' = Y \\ Y' = 0 \end{cases}$$

On a

$$(\text{NL}) : \begin{cases} x(t) = x_0 + \ln(1 + y_0 t) \\ y(t) = \dfrac{y_0}{1 + y_0 t} \end{cases} \quad \text{et (L)} : \begin{cases} X(t) = X_0 + Y_0 t \\ Y(t) = Y_0 \end{cases}$$

— NL stable, L instable :

$$(\text{NL}) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -y^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{et (L)} : \begin{cases} X' = Y \\ Y' = 0 \end{cases}$$

On a

$$(\text{NL}) : \begin{cases} x(t) = x_0 + 2\sqrt{y_0} - \dfrac{4\sqrt{y_0}}{2 + \sqrt{y_0} t} \\ y(t) = \left(\dfrac{2\sqrt{y_0}}{2 + \sqrt{y_0} t}\right)^2 \end{cases} \quad \text{et (L)} : \begin{cases} X(t) = X_0 + Y_0 t \\ Y(t) = Y_0 \end{cases}$$

— NL stable, L stable :

$$(\text{NL}) : \left\{ x' = -x^3 \right. \quad \text{et (L)} : \left\{ X' = 0 \right.$$

On a

$$(\text{NL}) : \left\{ x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \right. \quad \text{et (L)} : \left\{ X(t) = X_0 \right.$$

— NL instable, L stable :

$$(\text{NL}) : \left\{ x' = x^3 \right. \quad \text{et (L)} : \left\{ X' = 0 \right.$$

On a

$$(\text{NL}) : \left\{ x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}} \right. \quad \text{et (L)} : \left\{ X(t) = X_0 \right.$$