Table de $\mathcal{S}_4$

Références : Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, 4.4

Nous allons déterminer la table de caractère de $\mathcal{S}_4$.

Tout d'abord, on sait qu'il y a cinq classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_4$, qui correspondent aux types de la permutation. Ainsi, il y a la classe uniquement composée de l'identité, la classe comprenant les 6 transpositions, celle comprenant les 8 3-cycles, celles comprenant les 6 4-cycles et enfin celle comprenant les 3 doubles transpositions. [1] Il y a donc 5 caractères irréductibles. On connaît maintenant la taille de la table de caractères de $\mathcal{S}_4$.

• Caractères irréductibles de degré 1 :

On connaît deux représentations irréductibles de degré 1 : la représentation triviale **1** et la signature ε. On peut remplir les deux premières lignes de la table :

$\mathcal{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1

• Premier caractère irréductible de degré 3 :

On va donner une interprétation géométrique de la représentation associée. Soit T un tétraèdre régulier de l'espace euclidien, centré en l'origine. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) ses sommets. On note $Is(T)$ le groupe des isométries du tétraèdre. On a alors l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S}_4 &\to Is(T) \\ \sigma &\mapsto u : \begin{array}{ll} T & \to T \\ e_i & \mapsto e_{\sigma(i)} \end{array} \end{aligned}$$

Pour montrer que φ est définie, il suffit de la définir pour les transpositions et de la prolonger par morphisme de groupe. On voit alors $\varphi((12))$ comme la symétrie par rapport à l'hyperplan passant par e_3, e_4 et le milieu du segment $[e_1, e_2]$.
φ est injective car un élément de son noyau fixe un repère affine, donc est l'identité, et elle est surjective par construction. [2]
En pratique, on n'utilise pas que φ est un isomorphisme mais c'est joli donc on le dit quand même !

Comme $Is(T) \hookrightarrow \mathrm{O}(\mathbb{C}^3) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$, φ induit une représentation de degré 3 de $\mathcal{S}_4$. On note χ_3 le caractère associé : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_4, \chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(\varphi(\sigma))$. On calcule alors, dans la base (e_1, e_2, e_3) (sachant $e_4 = -e_1 - e_2 - e_3$) :

$$\varphi(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_3(12) = 1$$

$$\varphi(123) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_3(123) = 0$$

1. On les compte à l'oral en utilisant les arguments de combinatoire classiques : on a un point fixe à choisir parmi 4 éléments, etc...
2. Pendant la préparation, on fait un tétraèdre en papier brouillon, et on fait ce morceau de la preuve dessus en le montrant au jury.

$$\varphi(1234) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_3(1234) = -1$$

$$\varphi((12)(34)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_3((12)(34)) = -1$$

On vérifie que χ_3 est irréductible en calculant :

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{|\mathcal{S}_4|} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_4} |\chi_3(\sigma)|^2 = \frac{1}{24}(3^2 + 6 \times 1^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2) = 1$$

On peut alors compléter une ligne supplémentaire de la table [3] :

$\mathcal{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1

- Second caractère irréductible de degré 3 :

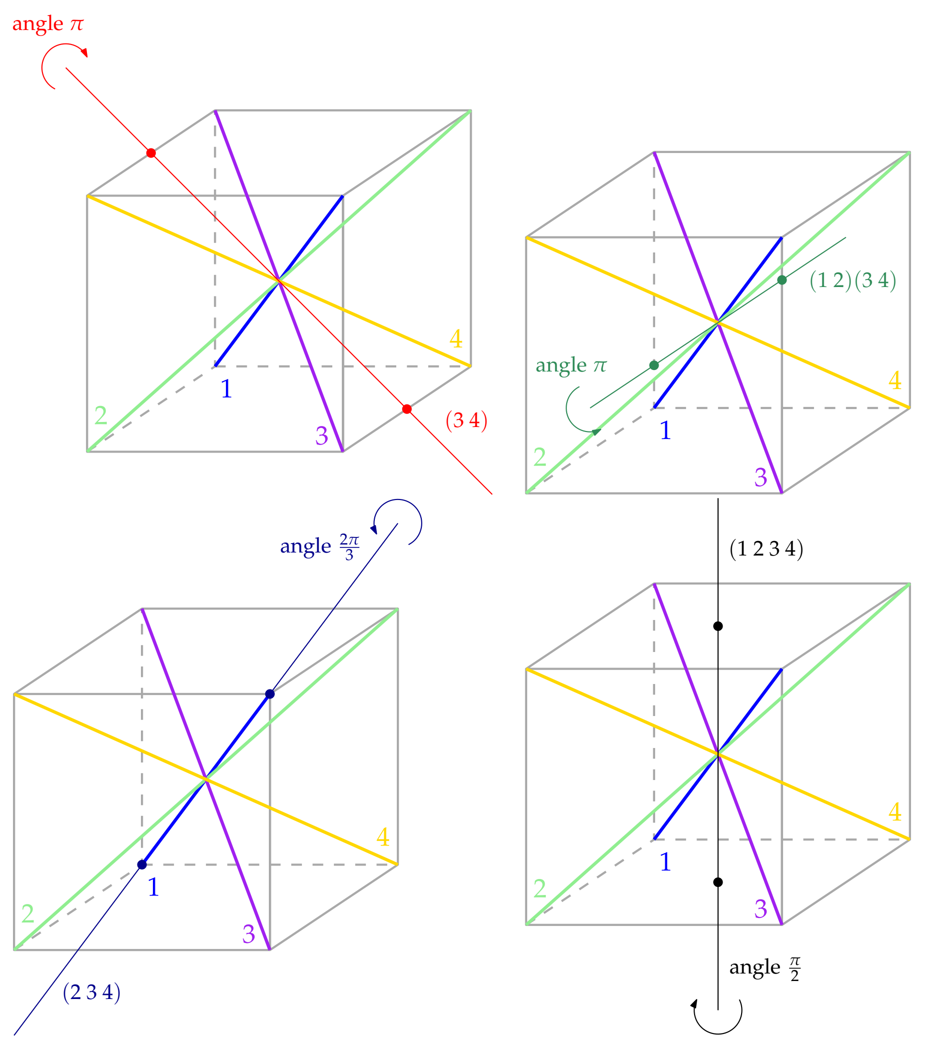
$\mathcal{S}_4$ est aussi isomorphe au groupe $Is^+(C)$ des isométries positives du cube.
En effet, on sait qu'une grande diagonale du cube est envoyée par une isométrie positive du cube sur une autre grande diagonale (car les isométries préservent les distances). L'action de $Is^+(C)$ sur les quatre grandes diagonales induit un morphisme $f : Is^+(C) \to \mathcal{S}_4$.
La rotation d'axe joignant les centres de deux arêtes opposées et d'angle π permute deux diagonales, laisse invariantes les deux autres. On a donc toutes les transpositions dans $\mathrm{Im}(f)$, donc f est surjective.
Ensuite, si une isométrie du cube u laisse globalement invariante chaque grande diagonale, chaque sommet du cube est donc invariant ou envoyé sur son opposé. On montre que si un sommet est envoyé sur son opposé, alors tous les sommets le sont (sinon on ne conserve pas les distances), et que la seule isométrie ayant cette propriété est la symétrie par rapport au centre du cube, donc une isométrie négative. f est donc injective, et finalement bijective.

Il existe donc un isomorphisme ψ de $\mathcal{S}_4$ dans $Is^+(C)$. Comme $Is^+(C) \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{C}^3) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$, ψ induit une représentation sur $\mathcal{S}_4$, dont le caractère sera noté $\chi_3^{'}$.

Pour tout σ dans $\mathcal{S}_4$, $\psi(\sigma)$ est donc une rotation, dont on connaît la trace : $\mathrm{Tr}(\psi(\sigma)) = \chi_3^{'}(\sigma) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{k})$, où k désigne l'ordre de σ [4].

3. On peut aussi définir le caractère χ_3 comme celui attaché à la représentation standard de $\mathcal{S}_4$, qui est irréductible. On a alors : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_4, \chi_3(\sigma) =$ (nombre de points fixes de σ) $- 1$. C'est plus rapide !

4. Si r est une rotation d'ordre k, il existe un réel θ et une base orthonormée dans laquelle r s'écrit : $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Comme $R_\theta^n = R_{n\theta}$, on déduit $\theta = \frac{2\pi}{k} \mod 2\pi$.
Puis comme on a un isomorphisme de groupes, l'ordre de la permutation et de la rotation associée sont les mêmes.



On calcule alors :

$$\chi_3^{'}(12) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{2}) = -1$$

$$\chi_3^{'}(123) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 0$$

$$\chi_3^{'}(1234) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{4}) = 1$$

$$\chi_3^{'}((12)(34)) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{2}) = -1$$

On vérifie que $\chi_3^{'}$ est irréductible en calculant :

$$\langle \chi_3^{'}, \chi_3^{'} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{S}_4|} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_4} |\chi_3^{'}(\sigma)|^2 = \frac{1}{24}(3^2 + 6 \times (-1)^2 + 6 \times 1^2 + 3 \times (-1)^2) = 1$$

.

On peut maintenant compléter une nouvelle ligne de la table [5] :

$\mathcal{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
$\chi_3^{'}$	3	-1	0	1	-1

5. On peut voir la représentation ψ comme $\mathrm{Hom}(\varphi, \epsilon)$. On a alors $\chi_3^{'} = \varepsilon\chi_3$. Le calcul de $\langle \chi_3^{'}, \chi_3^{'} \rangle$ donne $\langle \chi_3, \chi_3 \rangle$ qui vaut 1. Encore une fois, cette méthode est plus rapide !

• Dernier caractère irréductible :

Pour trouver le degré du dernier caractère irréductible, on utilise la formule $\sum_{\chi \text{irréductible}} \deg(\chi)^2 = |\mathcal{S}_4| = 24$. Le dernier caractère irréductible χ_2 est donc de degré $\sqrt{24 - 2 \times 1^2 - 2 \times 3^2} = 2$. On finit en utilisant l'orthogonalité des colonnes d'une table de caractères. En effet, si σ et τ ne sont pas dans la même classe de conjugaison, on a $\sum_{\chi \text{irréductible}} \overline{\chi(\sigma)}\chi(\tau) = 0$.

Finalement, on a la table de caractères complète de $\mathcal{S}_4$:

$\mathcal{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_3'	3	-1	0	1	-1

Remarques : • En fait, $(1234)^2 = (13)(24)$, donc on peut obtenir cette double transposition en faisant une rotation d'angle π au centre d'une face du cube.

• Pour mieux voir la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le cas du 3-cycle, on peut dessiner le tétraèdre inscrit dans le cube dont un des sommets est sur l'axe de rotation.

• On peut également trouver la représentation irréductible de degré 2 comme suit. Notons V_4 le groupe engendré par les doubles transpositions de $\mathcal{S}_4$. V_4 est distingué dans $\mathcal{S}_4$, et comme $D(\mathcal{S}_4) = \mathfrak{A}_4 \not\subset V_4$, le quotient $\mathcal{S}_4/V_4$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$, seul groupe d'ordre 6 non commutatif. L'image par la projection $\mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathcal{S}_3$ d'une transposition est une transposition (car d'ordre 2 dans $\mathcal{S}_3$), l'image d'un 3-cycle est un 3-cycle (car d'ordre 3 dans $\mathcal{S}_3$), l'image d'un 4-cycle est une transposition (car d'ordre 2 dans $\mathcal{S}_3$), et enfin l'image d'une double transposition est l'identité de $\mathcal{S}_3$ (car V_4 est le noyau de la projection).

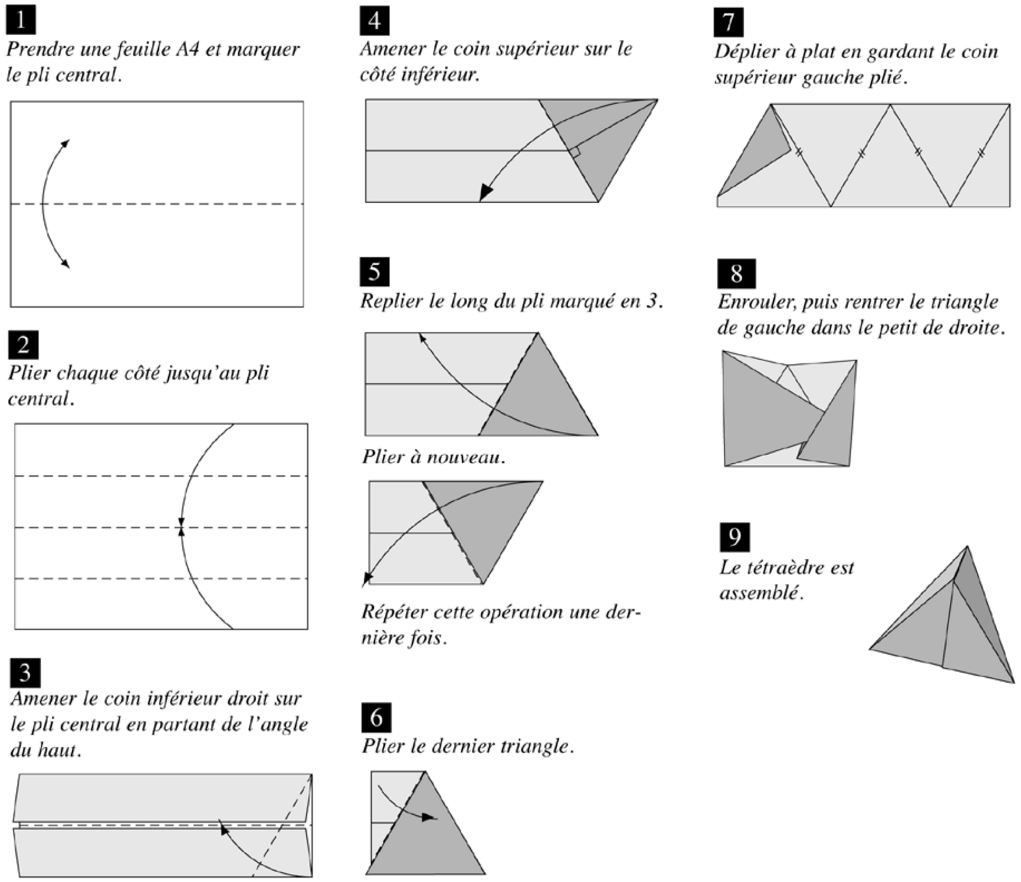
La représentation standard $\overline{\rho_2}$ de $\mathcal{S}_3$, de degré 2, induit une représentation ρ_2 de $\mathcal{S}_4$. Précisément, si $\overline{\sigma}$ désigne la classe de $\sigma \in \mathcal{S}_4$ modulo V_4, on a une représentation $\rho_2 : \mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ définie par : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_4, \rho_2(\sigma) = \overline{\rho_2}(\overline{\sigma})$. Notons χ_2 le caractère associé à la représentation ρ_2 de $\mathcal{S}_4$ et $\overline{\chi_2}$ le caractère associé à la représentation standard $\overline{\rho_2}$ de $\mathcal{S}_3$. On a : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_4$, $\chi_2(\sigma) = \overline{\chi_2}(\overline{\sigma})$.

Cependant, on connaît $\overline{\chi_2}$. En effet, le caractère θ associé à la représentation de permutation de $\mathcal{S}_3$ se décompose en $\theta = \mathbf{1} + \overline{\chi_2}$. En outre, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_3$, $\theta(\sigma) =$ nombre de points fixes de σ. On en déduit les valeurs de $\overline{\chi_2}$:

$\mathcal{S}_3$	1 Id	3 (12)	2 (123)
$\overline{\chi_2}$	2	0	-1

On peut calculer les valeurs de χ_2, et vérifier que $\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = 1$, donc que χ_2 est irréductible. C'est en fait général : pour G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G, une représentation irréductible de G/H remonte en une représentation irréductible de G.

• Il y a une manière assez simple de faire un tétraèdre avec de la force, de la fougue, de la tendresse, ainsi qu'une feuille de papier. La voici !



Extrait de « Pliages et mathématiques », ACL-Editions

Adapté du travail de Thibaut Tardieu et Florian Lemonnier.