Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$

Références : Ulmer, *Théorie des groupes*, p 138

Théorème.

Si G est un sous-groupe fini non trivial du groupe $SO_3(\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$, alors G est isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_m$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$ (avec $m \geqslant 2$).

Démonstration. • Les éléments de G sont des rotations, donc tout élément de $G \setminus \{id\}$ a une droite de points fixes : l'axe de la rotation. On appelle pôles ses deux intersections avec $\mathbb{S}^2$. On note X l'ensemble des pôles et on montre facilement que G induit une action sur X.
En effet, si $x \in X$ est un pôle de $g \neq id$, alors pour $h \in G$, $h(x)$ est un pôle pour hgh^{-1}, donc on a stabilité. Les autres axiomes sont trivialement vérifiés.
On a $2 \leqslant |X| \leqslant 2(n-1)$ en notant $n = |G|$ car G est non trivial et chaque $g \in G \setminus \{id\}$ a exactement deux pôles.
On note r le nombre d'orbites, alors la formule de Burnside donne

$$r = \frac{1}{|G|}\left(\left|X^{id}\right| + \sum_{g \neq id} \left|X^g\right|\right) = \frac{1}{n}\left(|X| + \sum_{i=1}^{n-1} 2\right) = \frac{1}{n}(|X| + 2(n-1)).$$

L'encadrement précédent donne $2 \leqslant r \leqslant 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 4$. D'où $r \in \{2, 3\}$.

• Supposons $r = 2$, il y a deux orbites X_1 et X_2. La formule des classes donne $2 = \frac{1}{n}(|X_1| + |X_2| + 2(n-1))$ donc $|X_1| + |X_2| = 2$ et donc $|X_1| = |X_2| = 1$. Toutes les rotations de G ont donc le même axe de rotation, celui passant par les deux pôles ainsi trouvés. On en déduit que G peut se voir comme un sous-groupe fini de rotations de $SO_2(\mathbb{R})$. C'est donc un groupe cyclique [1] et alors $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• Si $r = 3$, on nomme X_1, X_2, X_3 les orbites et on note n_i le cardinal du stabilisateur d'un représentant x_i de X_i. Le pôle x_i est par définition laissé fixe par au moins un $g \neq id$ donc $n_i \geqslant 2$.
On suppose $|X_1| \geqslant |X_2| \geqslant |X_3|$, alors comme $|X_i| = \frac{n}{n_i}$, on a $\frac{1}{n_1} \geqslant \frac{1}{n_2} \geqslant \frac{1}{n_3}$.
La formule de Burnside donne $3 = \frac{1}{n}(|X| + 2(n-1))$, donc $|X| = n + 2$.
En utilisant la formule des classes, il vient

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

On a donc $\frac{3}{n_1} \geqslant 1 + \frac{2}{n} > 1$, d'où $n_1 = 2$ car on a vu que $n_i \geqslant 2$. On en déduit :

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

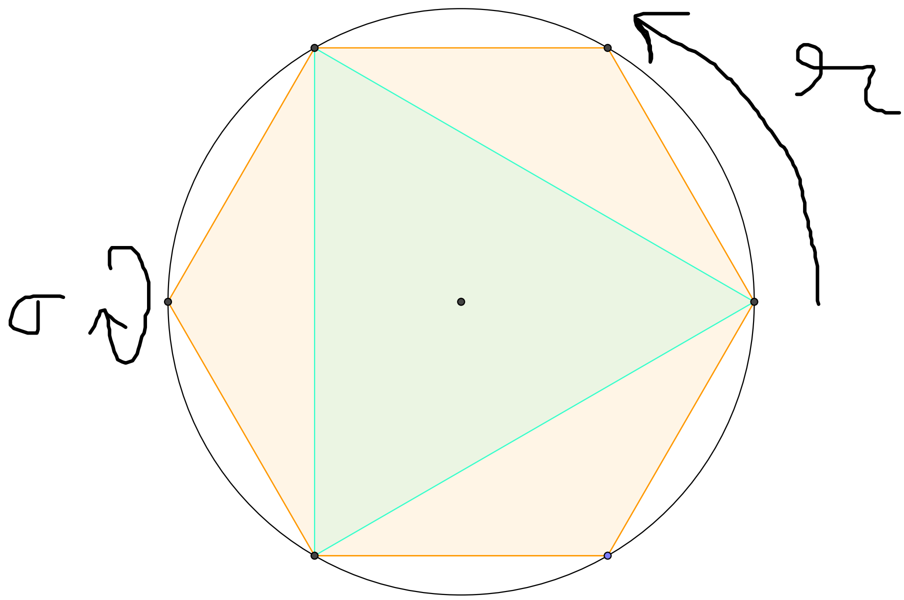
Donc $\frac{2}{n_2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{2}$ et $n_2 \in \{2, 3\}$.
Si $n_2 = 2$, on a $n_3 = \frac{n}{2}$ et si $n_2 = 3$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} > \frac{1}{6}$. Comme $n_3 \geqslant n_2 = 3$, on a $n_3 \in \{3, 4, 5\}$.
On arrive donc à la disjonction de cas suivante :

1. $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = \frac{n}{2}$ et $n = |G|$ est pair,
2. $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 3$ et G est d'ordre 12,
3. $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ et G est d'ordre 24,

1. On considère φ le morphisme de groupes qui à une rotation dans $SO_2(\mathbb{R})$ d'angle θ envoie $e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}^*$. Alors $\varphi(G)$ est un sous groupe fini de $\mathbb{C}^*$. On sait alors que forcément $\varphi(G) = \mathbb{U}_n$ donc G est cyclique.

4. $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ et G est d'ordre 60.

→ Cas 1 :
Comme $n_3 = \dfrac{n}{2} \geqslant n_2 = 2$, on a $n \geqslant 4$.
Si $n = 4$, $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{D}_2$.
Dans l'autre cas, on a $|X_3| = \dfrac{n}{n_3} = 2$. Il n'y a donc que deux pôles v et $-v$ dans X_3 (car $G_v = G_{-v}$ donc $|\mathrm{Orb}(v)| = |\mathrm{Orb}(-v)| = 2$ et il n'y a qu'une seule orbite de ce cardinal car $n \neq 4$). Le stabilisateur H de ces deux pôles est donc, par le même raisonnement que pour $r = 2$, un groupe cyclique de rotations dans $v^\perp$ de cardinal $\dfrac{n}{2}$.
Puis comme $X_3 = \{v, -v\}$ est une orbite, il existe un élément σ de $G \setminus H$ qui envoie v sur $-v$. Nécessairement c'est une rotation d'angle π d'axe inclus dans $v^\perp$. On dessine son axe dans le plan $v^\perp$ et on rajoute le polygone régulier donné par les rotations de H.
σ agit comme une symétrie axiale dans le plan $v^\perp$.
On remarque donc que $\mathbb{D}_{\frac{n}{2}} \subset G$ et par un argument de cardinal, $\mathbb{D}_{\frac{n}{2}} \simeq G$.



Sur le dessin ci-dessus[2], on peut mieux comprendre les deux cas précédents pour $n = 6$. On a un axe de rotation privilégié v et un polygone régulier à 6 côtés dans le plan orthogonal à cet axe. Alors soit on considère seulement les rotations $\{r^k, k \in [\![1, 6]\!]\}$ de ce polygone et on a le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, soit on prend un sous polygone régulier à 3 côtés (un triangle), et on n'a plus que 3 rotations mais on ajoute les symétries $\{r^{2k}\sigma, k \in [\![1, 3]\!]\}$, ce qui nous donne le groupe diédral $\mathbb{D}_{\frac{n}{2}}$. X_1 est le triangle bleu et X_2 est le triangle formé par les 3 autres sommets de l'hexagone.

→ Cas 2 :
On rappelle que les seuls groupes d'ordre 12 sont à isomorphisme près, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_6$, $\mathcal{A}_4$ et Dic_3.
Les éléments de G sont tous d'ordre un, deux ou trois car ils sont tous dans un stabilisateur. Il n'y a donc pas d'élément d'ordre 6, ce qui écarte les trois premiers cas facilement.
De plus, Dic_3 a un élément d'ordre 4, donc il est aussi éliminé.
Ainsi $G \simeq \mathcal{A}_4$.

→ Cas 3 :
Les éléments de G sont d'ordre 2, 3 ou 4. X_2 a 8 éléments et pour $v \in X_2$, $G_v = G_{-v}$, donc $|\mathrm{Orb}(v)| = |\mathrm{Orb}(-v)|$. Comme les orbites sont de cardinaux distincts, ces 8 pôles forment 4 axes de rotations qui sont donc d'ordre 3 (les rotations, pas les pôles). On a donc exactement quatre 3-Sylow/axes.

2. Au passage, c'est probablement le dessin le plus moche de l'univers...

Comme les p-Sylow sont conjugués, on a une action transitive du groupe sur ces 3-Sylow par conjugaison, en notant $X_2 = \{\pm P_1, \pm P_2, \pm P_3, \pm P_4\}$ les axes de rotation :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{S}_4 \\ g & \mapsto & \left(G_{\pm P_i} \mapsto gG_{\pm P_i}g^{-1}\right) \end{array}.$$

Alors soit $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $gG_{\pm P_i}g^{-1} = G_{\pm P_i}$ pour tout i.
Soit $r \in G_{\pm P_i}$, alors $grg^{-1}(g(\pm P_i)) = g(\pm P_i)$. Donc grg^{-1} est une rotation d'axe $g(\pm P_i)$ qui par hypothèse est aussi une rotation d'axe $\pm P_i$. Donc g fixe quatre droites distinctes. g est donc l'identité.

→ Cas 4 :
$\mathcal{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60, montrons donc que G est simple.
On rappelle que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Donc les 3-Sylow ont 3 éléments, les 5-Sylow ont 5 éléments et les 2-Sylow ont 4 éléments.
X_1 contient 30 pôles d'ordre 2. Par cardinalité des orbites, il contient 15 axes de rotations d'ordre 2.
En itérant ce raisonnement, on a quinze éléments d'ordre 2, dix 3-Sylow et six 5-Sylow.

Supposons que G ait un sous-groupe distingué propre H.
Si $5||H|$, par le théorème de Cauchy, H contient un élément d'ordre 5, donc un 5-Sylow. Il les contient donc tous car les 5-Sylow sont conjugués. Comme les 5-Sylow sont ici isomorphes à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ils sont d'intersection deux à deux réduite à id (sinon ils seraient égaux car tout élément différent de id est générateur). On en déduit que H a au moins $1 + 6 \times 4 = 25$ éléments, donc $|H| = 30$.
On remarque que $3|30$ donc H contient un élément d'ordre 3. Donc $H = G$. Absurde.

Si $3|H$, H contient au moins $1 + 10 \times 2 = 21$ éléments donc il est de cardinal 30. On a donc $5|H$ et on obtient $G = H$.

H est donc soit de cardinal 2, soit de cardinal 4.
Si $|H| = 2$, $H = \langle \sigma \rangle$ et comme H est distingué, $\forall g \in G, g\sigma g^{-1} = \sigma$. Donc toutes les rotations de G ont même axe. C'est impossible car sinon il n'y aurait que deux orbites.
Si $|H| = 4$, alors H est l'unique 2-Sylow (sinon il n'est pas distingué).
Tout élément d'ordre 2 est dans un 2-Sylow, car sinon le sous groupe d'ordre 2 engendré par cet élément serait maximal pour l'inclusion et serait donc un 2-Sylow. Or il y a 15 éléments d'ordre 2, donc il ne peut y avoir un unique 2-Sylow. □

Remarques : • Si on se donne un polyèdre régulier, on peut étudier les isométries positives de sa sphère circonscrite conservant les sommets du polyèdre (les isométries propres). Celles-ci forment des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Les groupes d'isométries positives des solides de Platon sont :
— $\mathcal{A}_4$ pour le tétraèdre,
— $\mathcal{S}_4$ pour le cube et l'octaèdre,
— $\mathcal{A}_5$ pour le dodécaèdre et l'icosaèdre.
Les polyèdres réguliers ayant le même groupe d'isométries sont en fait duaux, c'est à dire qu'en prenant un couple de tels polyèdres, si on relie les centres des faces de l'un, on obtient l'autre. On voit vite cette propriété avec le tétraèdre qui est son propre dual, et avec le cube qui engendre un octaèdre comme dual.
• Le groupe d'isométries de l'octaèdre est $\mathcal{S}_4$, pourtant par les deux premiers cas vus précédemment, on a vu que l'on pouvait faire agir des groupes d'isométries isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{D}_2$ sur les sommets de l'octaèdre. C'est logique car ces deux groupes s'injectent dans $\mathcal{S}_4$: un 4-cycle engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathcal{S}_4$ et $\mathbb{D}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut être vu comme le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par deux transpositions à supports disjoints.
• Ce développement est trop long, il vaut mieux s'arrêter au cas 3 et faire quelques dessins de polyèdres ensuite pour conclure.
• En fait, cette classification marche de la même manière pour les sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. C'est le théorème de Dickson. On peut trouver des éléments de réponse à ce sujet sur la page de Matthieu Romagny : `https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/exo/ss_gr_finis_PGL2.pdf`.
• Ces sous-groupes finis ne sont pas distingués car $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.