Réduction des endomorphismes normaux

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*, p260
`http://mp.cpgedupuydelome.fr/` (pour le lemme pratique)
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*, p65 (pour l'exponentielle)

Théorème.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On commence par énoncer le lemme fondamental (amélioré) qui fait tout marcher !

Lemme.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F est stable par u^* et $F^\perp$ est stable par u et u^*.
- Si u est normal, alors pour tout sous espace F stable par u, $u_{|F}$ est normal.

Démonstration. Je reprends une preuve assez intuitive trouvée à l'adresse suivante : `http://mp.cpgedupuydelome.fr/document.php?doc=Fiche%20-%20R%C3%A9duction%20des%20endomorphismes%20normaux.txt`.
On écrit la matrice de u dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Elle est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Le fait que $F^\perp$ est stable par u^* est trivial : il suffit de regarder la transposée. Le but est donc de montrer que $B = 0$.
u est normal, donc ${}^tAA = A{}^tA + B{}^tB$. En passant à la trace, on trouve $\mathrm{Tr}({}^tBB) = 0$. Or $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire, donc ici on a $\|B\| = 0$, donc $B = 0$.
On a ainsi $F^\perp$ est stable pour u, et donc stable pour u^*.

Pour le deuxième point, on reprend les calculs et on s'aperçoit que ${}^tAA = A{}^tA$, donc $u_{|F}$ est normal. $\square$

Démonstration. On va faire une récurrence sur n la dimension de E.
Pour $n = 1$, le résultat est évident.
Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

Cas 1 : u admet une valeur propre réelle λ.
L'espace E_λ est de dimension supérieure ou égale à 1 et est stable par u. Donc $E_\lambda^\perp$ est stable par u donc $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal. Il existe donc par hypothèse de récurrence (comme $\dim(E_\lambda^\perp) < n$) une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ dans laquelle la matrice de $u_{|E_\lambda^\perp}$ est jolie. On prend n'importe quelle base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de E_λ et on a u de la forme voulue dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Cas 2 : u n'a aucune valeur propre réelle.
Soit $Q = X^2 + \alpha X + \beta$ un diviseur irréductible de χ_u, on pose $N = \ker(Q(u))$.

- On a $N \neq \{0\}$. En effet, $Q = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$. Donc comme λ est une valeur propre complexe de u, on a $\det(u - \lambda id) = 0$. D'où il vient $\det(Q(u)) = 0$. Donc $N \neq \{0\}$.

• Soit $x \in N$, on pose $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x, u(x))$. Comme u n'a pas de valeurs propres réelles, $\dim(F) = 2$. De plus, F est stable par u car $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = -\alpha u(x) - \beta x \in F$ car $x \in N = \mathrm{Ker}(Q(u))$.
On peut donc définir $u_{|F}$ et c'est un endomorphisme normal.

• On se donne une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de F. On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $u_{|F}$ dans cette base.
La condition $u_{|F}$ normal implique $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ et $ab + cd = ac + bd$. Donc $b = \pm c$.
Si $b = c$, le polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ et son discriminant est $\Delta = (a-d)^2 + 4b^2$. Δ est positif donc on a au moins une valeur propre réelle pour $u_{|F}$, donc pour u, ce qui est absurde.
Donc $b = -c$.
La deuxième égalité donne $(a-d)b = 0$. Si $b = 0$, la matrice est diagonale, donc on a une valeur propre réelle. Donc $b \neq 0$ et $a = d$. La matrice de $u_{|F}$ est donc de la forme $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

• Conclusion :
On prend une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ mettant $u_{|F^\perp}$ sous la forme voulue. Puis en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on obtient une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est sous la forme demandée.
Ainsi la récurrence est prouvée. □

Remarque : • On peut appliquer ce théorème pour prouver les théorèmes de réduction des matrices orthogonales, antisymétriques et symétriques (théorème spectral). On en applique deux d'un coup juste après !

Et maintenant, une petite application sympa dont on fait la démonstration rapidement si on a le temps.

Corollaire.

La fonction exponentielle $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Démonstration. • Pour montrer qu'elle est définie, prenons $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^{\mathrm{t}}\exp(A) = \exp({}^{\mathrm{t}}A) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, donc $\exp(A) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Puis $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ avec $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ (quitte à mettre des blocs R_π pour le nombre pair de -1.

Alors on a $M = \exp(B)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \theta_1 J & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \theta_s J \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit maintenant d'observer la compatibilité de l'exponentielle avec le changement de base pour conclure. □

Remarque : on voit alors que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie associé au groupe de Lie $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.