Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Références : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*, p130

On considère ici la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur E. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire de dimension finie (notée n ici).

Théorème.

Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E), |||u||| \leqslant 1\}$, alors les points extrémaux de B sont les éléments de $\mathrm{O}(E)$.

On rappelle qu'un point extrémal u de B est un point tel que $B \setminus \{u\}$ est convexe. Sur un dessin, on voit que les points extrémaux de la boule unité de $\mathbb{R}^2$ sont les points du cercle.

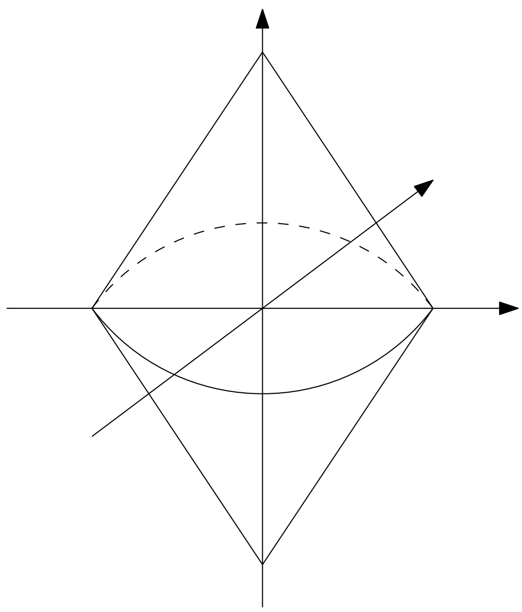
Démonstration. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, comme $|||\mathrm{O}(E)||| = \{1\}$, on a bien $u \in B$.
Supposons que $u = \frac{1}{2}(v+w)$ avec $v, w \in B$. Si on montre que cela implique $v = w$, on aura fini. En effet, si $B \setminus \{u\}$ n'était pas convexe, on pourrait trouver un segment $[v, w]$ contenant u et dont les bords sont dans $B \setminus \{u\}$. Quitte à découper notre segment, on peut se ramener au cas où u est au milieu du segment, c'est à dire $u = \frac{1}{2}(v+w)$. Donc si on prouve que $v = w = u$, on aura une absurdité.
Soit x de norme 1, alors $1 = \|x\| = \|u(x)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \leqslant \frac{1}{2}(|||v||| + |||w|||) \leqslant 1$.
On a donc égalité ! En particulier, pour tout x unitaire, $\|v(x)+w(x)\| = \|v(x)\| + \|w(x)\|$. Donc $v(x) = \lambda_x w(x)$ avec $\lambda_x > 0$ [1]. Or $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$ donc $\lambda_x = 1$.
$v(x) = w(x)$ pour tout x unitaire donc par linéarité, $v = w$ et u est bien un point extrémal de B.

Réciproquement, soit $u \in B$ tel que $u \notin \mathrm{O}(E)$. Montrons que u n'est pas extrémal.
On note A la matrice de u dans une base orthonormée de E. En utilisant la décomposition polaire (sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = OS$ avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
En utilisant le théorème de réduction des matrices symétriques, on a $S = PD{}^{\mathrm{t}}P$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ avec $0 \leqslant d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.
De plus, $|||A||| = |||OS||| = |||S||| = \sqrt{d_n^2} = d_n$ [2] et $u \in B$ donc $|||A||| \leqslant 1$. Donc $\forall i,\ d_i \in [0,1]$.
Par hypothèse, A n'est pas orthogonale, donc $S \neq I_n$, donc $d_1 < 1$. On peut donc écrire $d_1 = \frac{a+b}{2}$ où $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$ (on prend $a \geqslant -1$ et pas $a \geqslant 0$ pour le cas où $d_1 = 0$).
On pose alors $D_1 = \mathrm{Diag}(a, d_2, \ldots, d_n)$ et $D_2 = \mathrm{Diag}(b, d_2, \ldots, d_n)$.
On a $D_1 \neq D_2$ et $A = \frac{1}{2}(OPD_1{}^{\mathrm{t}}P + OPD_2{}^{\mathrm{t}}P)$.
Ici on est plutôt content, on a écrit A comme le milieu d'un segment. Néanmoins, il faut encore montrer que les bornes de ce segment sont dans B.
Soit X de norme 1, alors $\left\|OPD_i{}^{\mathrm{t}}PX\right\|^2 = {}^{\mathrm{t}}XPD_i{}^{\mathrm{t}}P{}^{\mathrm{t}}OOPD_i{}^{\mathrm{t}}PX = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}PX)D_i^2({}^{\mathrm{t}}PX)$.
Or $\left\|{}^{\mathrm{t}}PX\right\| = 1$ car P est orthogonale et X est unitaire.
En notant $Y = {}^{\mathrm{t}}PX$, on a ${}^{\mathrm{t}}YD_i^2Y = \sum_{j=2}^{n} d_j^2 y_j^2 + d_i^0 y_1^2$ avec $d_i^0 = a^2$ si $i = 1$ et b^2 si $i = 2$.
De plus, les coefficients de D_i^2 sont tous compris entre 0 et 1, donc ${}^{\mathrm{t}}YD_i^2Y \leqslant \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1$. On en déduit que $OPD_1{}^{\mathrm{t}}PX$ et $OPD_2{}^{\mathrm{t}}PX$ sont dans B.
Donc $A = \frac{1}{2}(OPD_1{}^{\mathrm{t}}P + OPD_2{}^{\mathrm{t}}P)$ est le milieu de deux éléments distincts de B. Donc A n'est pas un point extrémal ! $\square$

1. En effet, on a $\|v(x)+w(x)\|^2 = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2\|v(x)\|\|w(x)\| = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2(v,w)$. Donc $(v,w) = \|v(x)\|\|w(x)\|$. L'égalité dans Cauchy-Schwarz donne que $v(x) = \lambda_x w(x)$.
Puis $\|w(x)\|^2 \lambda_x = (v,w) = \|v(x)\|\|w(x)\| \in \mathbb{R}^+$, donc λ_x est positif.

2. On rappelle que sur les matrices, la norme 2 donne $|||M||| = \sqrt{\rho({}^{\mathrm{t}}MM)}$ où ρ est le rayon spectral, c'est à dire la valeur propre maximale.

Remarques : • Un théorème de Krein-Milman affirme qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est toujours l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux (voir FGN analyse 3). Donc ici, la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ est l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(E)$.
En particulier, on en déduit que tout élément de $\mathcal{L}(E)$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathrm{O}(E)$. Il existe donc une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'éléments de $\mathrm{O}(E)$. (Merci à Alexandre Bailleul pour cette idée.)
• On rappelle que $\mathrm{O}(E)$ n'est pas l'ensemble des éléments de norme 1.
• En dimension 1, le résultat est simple. En effet, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à $\mathbb{R}$ et B au segment $[-1,1]$. D'autre part, $\mathrm{O}(E)$ n'est constitué que de $\pm I_1$ soit 1 et -1.
• En dimension 2, $\mathrm{O}(E)$ s'identifie à deux cercles disjoints : l'un représentant l'ensemble des angles des rotations de $\mathrm{SO}(E)$ et l'autre représentant l'ensemble des angles des axes de symétries de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$. B s'identifie donc à un compact convexe de dimension 4 tel que ses points extrémaux soient deux cercles.
On peut préciser cette vision. En effet, si $A \in \mathrm{SO}_2$ alors $-A \in \mathrm{SO}_2$. Il en va de même pour l'autre composante connexe. Donc les cercles sont centrés autour de 0.
On peut ensuite projeter en dimension 3 pour obtenir que la boule unité est un double cône (deux cônes collés par leur base circulaire) dont la hauteur évolue de 0 à 1 (et de manière symétrique sur celui du bas). On peut faire de jolis dessins de ces doubles toupies évolutives pour "voir" la boule.



La double toupie