Partitions d'un entier en parts fixées

Références : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 2*, p199

Théorème.

Soient a_1, ..., a_k des entiers naturels non nuls premiers entre eux. On note u_n le nombre de k-uplets $(x_i)_{i\in[1,k]}$ tels que $\sum a_i x_i = n$. Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 ... a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

Démonstration. • On commence par étudier les séries $\sum_{x_i\in\mathbb{N}} z^{a_i x_i}$. Elles sont définies de rayon de convergence 1 (par le lemme d'Abel).

On peut faire le produit de Cauchy de ces séries pour obtenir la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(x_i)\in\mathbb{N}^k \\ \sum a_i x_i = n}} 1\right) z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.[1] On remarque que le terme général de cette série est u_n.
On pose donc la série génératrice $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{x_i\in\mathbb{N}} z^{a_i x_i}\right) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-z^{a_i}}$.

• Étudions les pôles de f.
Les pôles sont les racines a_i-èmes de l'unité. Le pôle 1 est évidemment de multiplicité k.
Montrons que les autres pôles sont de multiplicité strictement inférieure à k.
Par le théorème de Bézout, il existe u_1, ..., u_k tels que $\sum u_i a_i = 1$.[2]
Si ω est une racine de l'unité de multiplicité k, alors $\omega^{a_i} = 1$ donc $\omega = \omega^{\sum u_i a_i} = \prod_{i=1}^{k}(\omega^{a_i})^{u_i} = 1$.

• Décomposons en éléments simples f :
On note $P = \{\omega_1, ..., \omega_p\}$ les pôles de f avec $\omega_1 = 1$.
Alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{i\in[1,p] \\ j\in[1,k-1]}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - z)^j}$.

• Pour $\omega \in P$, $\frac{1}{(\omega - z)^j}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$.
On a déjà pour $|z| < 1$, $\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\omega^{n+1}}$.
Donc en dérivant : $\frac{(j-1)!}{(\omega-z)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty}\frac{n!}{(n-j+1)!}\frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$.
Donc $\frac{1}{(\omega-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{z^n}{\omega^{n+j}}$.

• Conclusion :
On déduit en identifiant les coefficients que $u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{i\in[1,p] \\ j\in[1,k-1]}}\frac{c_{i,j}}{\omega_i^{n+j}}\binom{n+j-1}{n}$.

Or $\binom{n+j-1}{n} = \frac{1}{(j-1)!}(n+j-1)...(n+1) \sim \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$, donc $u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + o(n^{k-1}) \sim \alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.
Puis on a $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z<1}}(1-z)^k f(z) = \alpha$.

1. Le rayon de convergence du produit de Cauchy est supérieur ou égal au minimum des rayons de convergence des séries entières étudiées.
2. $\sum a_i\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ qui est principal, donc il est engendré par un élément m. Or m divise a_i pour tout i et ils sont premiers entre eux donc $m = 1$.

Et $(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+z+...+z^{a_i-1}}$, donc $\alpha = \frac{1}{a_1...a_k}$.
On en déduit $u_n \sim \frac{1}{a_1...a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$. $\square$

Remarques : • On adapte la preuve avec des séries formelles et des fractions rationnelles selon la leçon. J'ai préféré l'écrire avec les séries entières pour bien faire apparaître où intervient l'étude des convergences.
• En faisant cette preuve, on a aussi trouvé une méthode de calcul de u_n ! Il suffit de trouver la décomposition en éléments simples explicite de f, puis d'en déduire u_n avec la formule
$u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{i\in[1,p] \\ j\in[1,k-1]}} \frac{c_{i,j}}{\omega_i^{n+j}}\binom{n+j-1}{n}$.
Par exemple, si on veut décomposer 100 euros en pièces de 1 ou 2 euros, on écrit la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ et on trouve $u_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4}$. En particulier, $u_{100} = 51$. C'est logique, on peut choisir entre 0 et 50 pièces de 2 euros, et on compense comme on veut avec les pièces de un euro.