Étude de $\mathrm{O}(p,q)$

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, p 211

Cadre : on note $\mathrm{O}(p,q)$ le sous groupe de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ des isométries pour la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2$. On note $I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ et on rappelle que $M \in \mathrm{O}(p,q) \Leftrightarrow MI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}M = I_{(p,q)}$.

Théorème.

Soient $p, q \geqslant 1$, alors il existe un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

Démonstration. • Prenons $M \in \mathrm{O}(p,q)$, alors par décomposition polaire, $M = OS$ avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ pour $n = p+q$. Montrons que $O, S \in \mathrm{O}(p,q)$.
On pose $T = {}^{\mathrm{t}}MM$, alors $S^2 = T$.
On a $M \in \mathrm{O}(p,q)$ donc $MI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}M = I_{(p,q)}$, donc ${}^{\mathrm{t}}M^{-1}I_{(p,q)}M^{-1} = I_{(p,q)}$, d'où ${}^{\mathrm{t}}M^{-1} \in \mathrm{O}(p,q)$ et ainsi ${}^{\mathrm{t}}M \in \mathrm{O}(p,q)$.
Donc $S^2 = T = {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathrm{O}(p,q)$.

A présent, on sait que $T \in \mathcal{S}_n^{++}$, donc comme exp réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$, on a l'existence de $U \in \mathcal{S}_n$ tel que $T = \exp(U)$. Alors

$$\begin{aligned}
T \in \mathrm{O}(p,q) &\Leftrightarrow TI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}T = I_{(p,q)} \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}T = I_{(p,q)}T^{-1}I_{(p,q)} \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\exp(U) = I_{(p,q)}\exp(U)^{-1}I_{(p,q)}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \exp({}^{\mathrm{t}}U) = \exp(-I_{(p,q)}UI_{(p,q)}^{-1}) \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}U = U = -I_{(p,q)}UI_{(p,q)}^{-1} \text{ (par bijectivité de exp)} \\
&\Leftrightarrow UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}U = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{U}{2}I_{(p,q)} + I_{(p,q)}\frac{U}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\exp(\frac{U}{2}) = I_{(p,q)}\exp(\frac{U}{2})^{-1}I_{(p,q)}^{-1} \text{ (en remontant les calculs comme précédemment).}
\end{aligned}$$

Comme $\exp(\frac{U}{2}) \in \mathcal{S}_n$ et $\exp(\frac{U}{2})^2 = T$, par unicité de la racine carrée, $S = \exp(\frac{U}{2})$ et donc $SI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}S = I_{(p,q)}$.
Il vient $S \in \mathrm{O}(p,q)$, et donc $O \in \mathrm{O}(p,q)$.

On sait que la décomposition polaire induit l'homéomorphisme $\mathrm{GL}_n \cong \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}$, donc par le travail précédent, on a l'homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \cong (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}).$$

• Étudions $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)$.
Soit O dans ce groupe, alors $OI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}O = I_{(p,q)}$ et $O^{\mathrm{t}}O = I_n$. Si on écrit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{\begin{array}{c} A^{\mathrm{t}}A - B^{\mathrm{t}}B = I_p \\ A^{\mathrm{t}}C - B^{\mathrm{t}}D = 0 \\ C^{\mathrm{t}}A - D^{\mathrm{t}}B = 0 \\ C^{\mathrm{t}}C - D^{\mathrm{t}}D = -I_q \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} A^{\mathrm{t}}A + B^{\mathrm{t}}B = I_p \\ A^{\mathrm{t}}C + B^{\mathrm{t}}D = 0 \\ C^{\mathrm{t}}A + D^{\mathrm{t}}B = 0 \\ C^{\mathrm{t}}C + D^{\mathrm{t}}D = I_q \end{array}\right.$$

On en déduit $B^{\mathrm{t}}B = 0$, donc comme $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}(M^{\mathrm{t}}N)$ est un produit scalaire, on a $B = 0$.
De même, on a $C = 0$. Ainsi $A \in \mathrm{O}(p)$ et $D \in \mathrm{O}(q)$.

On en déduit $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in \mathrm{O}(p), D \in \mathrm{O}(q) \right\} \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$.

• Étudions $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}$.

On pose $L = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}U = 0\}$, alors on a vu plus haut que exp réalise une bijection entre $L \cap \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}$. Or l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$ donc elle induit l'homéomorphisme $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++} \cong L \cap \mathcal{S}_n$.

Soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n$, avec A, D symétriques, alors comme $UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}U = 2\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, on a $U \in L \Leftrightarrow A = 0$ et $D = 0$.

Il en découle que $L \cap \mathcal{S}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q} \right\}$ et on déduit l'homéomorphisme $L \cap \mathcal{S}_n \cong \mathbb{R}^{pq}$.

→ On a donc comme annoncé :

$$\mathrm{O}(p,q) \cong (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}) \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

□

Corollaire.

1. $\mathrm{O}(p,q)$ est compact si et seulement si p ou q est nul.
2. $\mathrm{O}(p,q)$ a quatre composantes connexes si $p, q \neq 0$.
3. La composante connexe de l'identité est $\mathrm{SO}_0(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(p,q), A \in \mathrm{GL}_p^+ \right\}$.

La troisième propriété est la seule non évidente. On pourra trouver la preuve dans le H2G2.

Remarques : • Au fait, $\mathrm{O}(p,q)$ est un groupe. Pour le voir, on multiplie par l'inverse à gauche et sa transposée à droite dans $MI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}M = I_{(p,q)}$ pour obtenir l'égalité voulue.

• On utilise beaucoup le fait que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut voir ça au chapitre **??**.

• Le groupe $\mathrm{SO}_0(3,1)$ est appelé groupe de Lorentz restreint et sert en physique quantique et en électromagnétisme.

• En fait $\mathrm{O}(p,q)$ est un groupe de Lie car c'est un sous groupe fermé de $\mathrm{GL}(n)$ (voir le théorème de Cartan - Von Neumann au chapitre **??**). En effet, pour M dans $\mathrm{O}(p,q)$, $M(I_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}MI_{(p,q)}) = I_n$ et si on pose l'application continue $\varphi : M \mapsto MI_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}M$ alors $\mathrm{O}(p,q) = \varphi^{-1}(I_{(p,q)})$.

L'algèbre de Lie associée est $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), HI_{(p,q)} + I_{(p,q)}{}^{\mathrm{t}}H = 0\}$ (l'espace tangent en l'identité). On reconnaît bien sûr l'ensemble L défini précédemment !