Image de l'exponentielle

Références : Zavidovique, *Un max de maths*, p 48-55

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Démonstration. • Commençons par montrer que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. [1]
L'inclusion $\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est évidente. Pour l'autre inclusion, il faut se rappeler que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors A^{-1} est un polynôme en A. En effet, il suffit d'utiliser Cayley-Hamilton et de multiplier par A^{-1} l'égalité obtenue.
Si $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors M^{-1} est un polynôme en M, donc un polynôme en A. On en déduit que $M \in \mathbb{C}[A]^\times$.

• $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe (par arcs) de $\mathbb{C}[A]$.
$\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \det{}^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. Pour démontrer la connexité, on se donne M, $N \in \mathbb{C}[A]^\times$ et on va créer un chemin reliant M et N.
On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(z) := zM + (1-z)N$ est dans $\mathbb{C}[A]$. On remarque que $z \mapsto \det(M(z))$ est polynomiale en z, donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Il s'agit donc de trouver un chemin $z(t)$ qui évite ces points.
On peut prendre un chemin de la forme $z_a(t) = t + iat(1-t)$. En effet, on voit vite que $(a,t) \mapsto z_a(t)$ est injectif. Donc le nombre de $z_a(t)$ passant par des zéros de $\det(M(z))$ est inférieur ou égal au nombre de zéros de $\det(M(z))$. Comme il est fini, on a une infinité de chemins à disposition.

→ Pour montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$, comme $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe, il suffit de montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert, fermé et non vide.
On voit déjà que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$. Puis $I_n = \exp(0) \in \mathbb{C}[A]^\times$.

• Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert.
On se rappelle que $D\exp(0) = I_n$. Par le théorème d'inversion locale, on a donc existence d'un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et d'un voisinage ouvert V de I_n dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ tel que exp réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.
Soit $M = \exp(N) \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M.V$ est un voisinage ouvert de M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. En effet, l'exponentielle commute sur les polynômes en A, donc $\exp(N+U) = \exp(N).\exp(U) = M.V$. On a donc prouvé que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert.

• Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé.
On utilise ici une astuce usuelle dans le cadre des groupes topologiques. On remarque que

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M.\exp(\mathbb{C}[A]).$$

La première inclusion est évidente :

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M\exp(0) \subset \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M.\exp(\mathbb{C}[A]).$$

Puis soit $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ et $N = M\exp(B)$ avec $B \in \mathbb{C}[A]$, alors $M = N\exp(-B)$. Donc si on suppose par l'absurde que $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, ce qui est exclu.
La formule est prouvée et cela conclut la preuve par connexité. □

Corollaire.

L'image de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. C'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$. On a $\mathbb{R}[A]^\times = \mathbb{R}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le même raisonnement.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors comme $A \in \mathbb{C}[A]^\times$ et $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$, on a l'existence de B dans $\mathbb{C}[A]$ (donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) tel que $A = \exp(B)$. $\square$

Corollaire.

On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 := \{A^2, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(M) = \exp(M/2)^2$, ce qui donne la première inclusion.
Soit $B = A^2$, avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors par le théorème, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. En passant au conjugué, on a $A = \exp(\overline{P}(A))$. Alors $B = A^2 = \exp((P + \overline{P})(A))$. $\square$

Remarques : • Attention l'égalité $\exp(\mathbb{R}[A]) = \mathbb{R}[A]^\times$ est fausse en général ! Si A est diagonale, alors $-I_n \in \mathbb{R}[A]^\times$ et n'est pas dans l'image de l'exponentielle.
• Un bon moyen de voir que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de se rappeler que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.
• Attention $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$