# Équation de Hill-Mathieu

**Références :** Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, p 410-412

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' + qy = 0 \quad ;$$

avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire, $\pi$-périodique. On cherche une quantité que caractérise l'existence de solution bornée. En vertu du théorème de *Cauchy - Lipschitz*, l'espace des solutions de $(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, de dimension 2, que l'on notera $W$. On peut, de plus, le munir d'une base "canonique" $(y_1, y_2)$ définie par :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

On considère l'endomorphisme de translation suivant :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f(. + \pi) \end{array} \quad .$$

**Étape 1 :** $W$ est $u$-stable.
Soit $y \in W$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, comme $q$ est $\pi$-périodique,

$$u(y)''(x) + q(x)u(y)(x) = y''(x + \pi) + q(x)u(x + \pi) = y''(x + \pi) + q(x + \pi)u(x + \pi) = 0.$$

Donc $u(y)$ est solution de $(E)$.

Par abus on identifiera $u$ à la matrice de $u_{|W}$ dans la base $(y_1, y_2)$. On a :

$$u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad .$$

**Étape 2 :** a,b,c,d ?
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $u(y_1)(x) = ay_1(x) + by_2(x)$. En évaluant en 0, on obtient : $a = y_1(\pi)$. De plus en dérivant l'expression précédente et en évaluant en 0, on obtient : $b = y_1'(\pi)$. En procédant de même avec $y_2$, on montre que l'on a : $c = y_2(\pi)$ et $d = y_2'(\pi)$.

On pose : $T = tr(u) = a + d$.

**Étape 3 :** $\det(u)$ ?
Soit $w$ la wronskien de la base $(y_1, y_2)$. On a : $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. On vérifie que la dérivée de $w$ est constante égale à 0. Par continuité du wronskien, il est donc constant. On a donc : $\det(u) = w(\pi) = w(0) = 1$.

**Étape 4 :** $a = d$
On pose $z = y_1(-.)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$z''(x) + q(x)z(x) = y_1''(-x) + q(x)y_1(-x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0,$$

car $q$ est paire. On en conclut que $z$ est solution de $(E)$. Or elle vérifie les mêmes conditions initiales que $y_1$, elle lui est donc égale. On en déduit que $y_1$ est paire. De la même manière, il apparaît que $y_2$ est impaire.
L'inverse de $u$ est l'endomorphisme $u^{-1} : f \mapsto f(. - \pi)$. Sa matrice dans la base $(y_1, y_2)$ est donc :

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \quad .$$

Or d'après la formule de l'inverse (avec la comatrice) on a aussi :

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad .$$

On en déduit que $a = d$.
Nous avons donc à présent toutes les cartes en main pour démontrer le théorème suivant :

**Théorème.**

- Si $|T| < 2$, alors toutes les solutions de $(E)$ sont bornées.
- Si $|T| = 2$, alors il existe des solutions bornées non nulles.
- Si $|T| > 2$, alors toutes les solutions non nulles sont non-bornées.

*Démonstration.* Le polynôme caractéristique de $u$ est : $\chi_u(X) = X^2 - TX + 1$. Son discriminant est donc $\Delta = T^2 - 4$.

**Cas 1 :** Si $|T| < 2$.
Dans ce cas, on a $\Delta < 0$. $u$ admet donc deux valeurs propres complexes conjuguées, $\rho$ et $\bar{\rho}$. On a : $\rho\bar{\rho} = 1$ donc $|\rho| = 1$. Soient $z_1$ et $z_2$ les valeurs propres associées. C'est une base propre de $W$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $z_1(x + \pi) = \rho z_1(x)$. La fonction $|z_1|$ est donc $\pi$-périodique et donc bornée. On en déduit que $z_1$ est bornée. De la même manière, $z_2$ est bornée. Par linéarité, toutes les solutions sont bornées.

**Cas 2 :** $|T| = 2$.
Si $|T| = 2$, le discriminant est nul et $\pm 1$ est l'unique valeur propre. En considérant un vecteur propre $z$ associé, on montre de la même manière que $|z|$ est $\pi$-périodique et que $z$ est une solution bornée.

**Cas 3 :** Si $|T| > 2$.
Dans ce cas, $u$ admet deux valeurs propres réelles $\alpha$ et $\alpha^{-1}$ (avec $\alpha > 1$). On note $z_1$ et $z_2$ les vecteurs propres associés. Ils forment une base. Soit $y$ une solution non nulle, on dispose de $\beta$ et $\gamma$ non tous nuls, tels que : $y = \beta z_1 + \gamma z_2$. Si $\beta \neq 0$, on dispose de $x_0$ tel que $z_1(x_0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$y(x_0 + n\pi) = \alpha^n \beta z_1(x_0) + \alpha^{-n}\gamma z_2(x_0) \text{ ,qui explose quand } n \text{ croît.}$$

De la même manière, si $\gamma$ est non nul, il faut faire tendre $n$ vers $-\infty$ pour montrer l'explosion. Ainsi toute solution non nulle est non bornée. □

**Remarques :** • Si $q = 1$, on trouve $y_1 = \cos$ et $y_2 = \sin$. La trace est alors

$$T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2\cos(\pi) = -2.$$

Donc il existe des solutions bornées et en fait elles le sont toutes dans ce cas là.
• Si $q = -1$, on trouve $y_1 = \cosh$ et $y_2 = \sinh$. La trace est alors

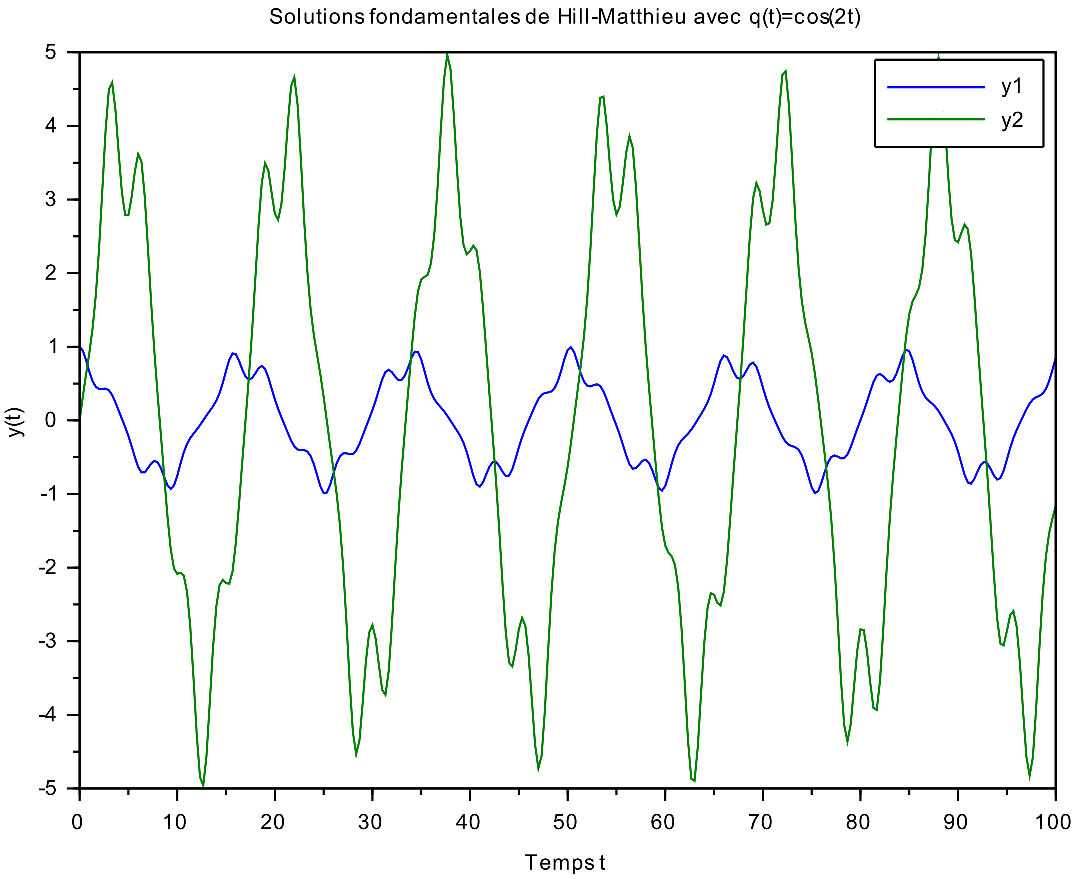
$$T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2\cosh(\pi) > 2.$$

Il n'y a donc pas de solution bornée non nulle.
• On pourrait essayer de résoudre explicitement l'équation pour des $q$ plus complexes mais c'est difficile. Par exemple, pour $q(x) = \cos(2x)$, la résolvante est déjà incalculable.
Le théorème n'en est pas pour autant inutilisable. En effet, $T$ est donné par

$$T = y_1(\pi) + y_2'(\pi).$$

Il suffit donc de savoir approximer assez précisément $y_1$ et $y_2$ (avec un RK4 par exemple) pour pouvoir déterminer si on a une chance de trouver des solutions bornées non triviales.

Voici un exemple où $T$ vaut environ 0.77. On observe que $y_1$ et $y_2$ sont bornées.




D'ailleurs je n'ai pas choisi cet exemple au hasard. Mathieu a étudié cette équation pour $q(x) = \lambda - 2\varepsilon \cos(2x)$. Il s'intéressait à l'équation d'onde pour une membrane elliptique. Hill a retrouvé une équation similaire en étudiant le périgée de la lune.

*Adapté du travail de Baptiste Huguet.*