Groupe circulaire

Références : Audin, *Géométrie*, p 203

On définit G le groupe de transformations de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ engendré par les homographies et la symétrie $z \mapsto \overline{z}$. Le groupe G contient donc $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et les inversions.

Théorème.

Le groupe G est exactement l'ensemble des transformations **bijectives** préservant les droites-cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Démonstration. $\subset$ La conjugaison complexe préserve les droites cercles.
Passons aux homographies :
On rappelle que pour que quatre points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ soient sur une droite-cercle, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.
Donnons-nous un droite-cercle D, ainsi que trois points distincts a, b et c le définissant, et une homographie h. Alors pour tout z sur D, on sait que $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ et $h(z)$ sont alignés ou cocycliques car les homographies conservent le birapport [1]. Comme $h(a)$, $h(b)$ et $h(c)$ déterminent entièrement le cercle-droite image D', pour tout z sur D, $h(z)$ est sur D'. Par bijectivité de h, on a $h(D) = D'$.

$\supset$ Réciproquement, soit φ une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ préservant les droite-cercles. Pour simplifier, on peut composer à gauche φ par une homographie (ce qui ne change pas son appartenance à G) pour que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$, ainsi elle envoie les cercles sur les cercles et les droites sur les droites.
Commençons par montrer que φ préserve les divisions harmoniques. [2]

Lemme.

Toute application bijective f préservant les droite-cercles préserve aussi les divisions harmoniques.

Démonstration. • Soient a, b, c et d en division harmonique. Soient h_1 et h_2 deux homographies tels que

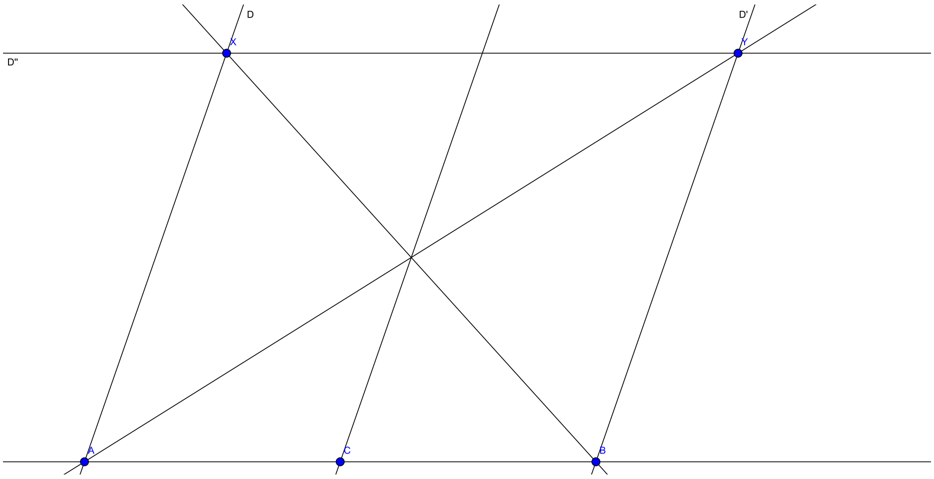
$$\begin{cases} h_1(f(d)) = \infty \\ h_2(0) = a \\ h_2(1) = b \\ h_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = c \\ h_2(\infty) = d \end{cases},$$

Alors $h_1 \circ f \circ h_2$ préserve aussi les droite-cercles et envoie l'infini sur l'infini. De plus, f préserve la division harmonique de a, b, c et d si set seulement si $h_1 \circ f \circ h_2$ préserve celle de 0, 1, $\dfrac{1}{2}$ et ∞.
On renomme par abus f l'application $h_1 \circ f \circ h_2$. Alors il suffit de montrer que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

• On trace la figure suivante :
On prend une droite D passant par $A(0)$ et non colinéaire à (AB) (avec $B(1)$). On trace la parallèle passant par B, D'. Puis on trace une parallèle à (AB) et enfin on retrouve le point $C(1/2)$ en traçant la parallèle à D passant par l'intersections des diagonales du parallélogramme obtenu.

1. Soit h une homographie, f l'unique homographie tel que $[a, b, c, d] = f(d)$ et g l'unique homographie tel que $[h(a), h(b), h(c), h(d)] = g(h(d))$, alors $g \circ h$ est une homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1, donc par unicité $g \circ h = f$, ce qui montre que les homographies conservent le birapport.
2. On rappelle qu'une division harmonique est un quadruplet de points tels que $[a, b, c, d] = -1$. En particulier, si $d = \infty$, $[a, b, c, d] = -1$ donne $\dfrac{c-b}{c-a} = -1$ donc $c = \dfrac{a+b}{2}$, c est le milieu de $[ab]$.



• On a ainsi construit C grâce à des parallèles et des intersections.
Or f envoie l'infini sur l'infini donc envoie les droites sur les droites. Puis f préserve le parallélisme, car deux droites parallèles s'intersectent à l'infini et f préserve l'infini. De même, f préserve les intersections.
On en déduit que l'on peut appliquer f à cette construction. Le point $f(C)$ est alors bien le milieu de $f(A)$ et $f(B)$.
Donc f préserve les divisions harmoniques. □

Fort de ce résultat, nous pouvons maintenant montrer que φ est un morphisme de corps de $\mathbb{C}$.
On a déjà astucieusement modifié φ au départ pour que 0 et 1 soient fixés. On doit juste montrer que φ est additive et multiplicative.
Soient $a \neq b \in \mathbb{C}$, alors $[a, b, \frac{a+b}{2}, \infty] = -1$, donc $[\varphi(a), \varphi(b), \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right), \infty] = -1 = [\varphi(a), \varphi(b), \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}, \infty]$, d'où il vient que $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$.
En prenant $b = 0$, comme $\varphi(0) = 0$, il vient $\varphi(a) = 2\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$. On a donc

$$\varphi(a+b) = \varphi\left(\frac{2a+2b}{2}\right) = \frac{\varphi(2a)+\varphi(2b)}{2} = \frac{2\varphi(a)+2\varphi(b)}{2} = \varphi(a)+\varphi(b)$$

Étudions maintenant la multiplicativité.
Pour cela, on remarque que $[a, -a, a^2, 1] = \frac{a^2-a}{a^2+a} \times \frac{1+a}{1-a} = -1$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On a en particulier $[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] = -1$ et comme φ conserve les divisions harmoniques, $[\varphi(a), \varphi(-a), \varphi(a^2), \varphi(1)] = -1$. On a $[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] = [\varphi(a), -\varphi-a), \varphi(a^2), 1]$. Donc $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$.
On se rappelle alors astucieusement que $ab = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$, alors on a

$$4\varphi(ab) = \varphi(4ab) = \varphi((a+b)^2) - \varphi((a-b)^2) = \varphi(a+b)^2 - \varphi(a-b)^2 = (\varphi(a)+\varphi(b))^2 - (\varphi(a)-\varphi(b))^2 = 4\varphi(a)\varphi(b)$$

Il vient $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, donc φ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.

Pour finir, φ envoie 0 sur 0, 1 sur 1 et ∞ sur ∞, donc il envoie la droite réelle sur elle-même.
Par le raisonnement classique, φ est l'identité sur $\mathbb{Q}$.
Puis soient $x < y$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $y - x = z^2$. On a ainsi

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y-x) = \varphi(z^2) = \varphi(z)^2 > 0.$$

En effet, $\varphi(z) \in \mathbb{R}^{+*}$ car φ préserve la droite réelle et n'envoie que 0 sur 0.
Donc φ est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}$, et $a_n < x < b_n$ deux suites de rationnels tendant vers x, alors $a_n < \varphi(x) < b_n$ et en passant à la limite $\varphi(x) = x$. φ est l'identité sur $\mathbb{R}$.

φ est alors uniquement déterminée par $\varphi(i)$ car $\varphi(a+ib) = a + \varphi(i)b$, mais $-1 = \varphi(i^2) = \varphi(i)^2$, donc $\varphi(i) \in \{1, -1\}$. On en déduit que φ est soit l'identité, soit la conjugaison complexe. Donc $\varphi \in G$. □

Remarques : • Le Audin semble trouver évident le fait que toutes les applications préservant les droites/cercles sont bijectives... Je ne vois pas pourquoi ! Il vaut donc mieux le rajouter.
• Il ne suffit pas de dire que φ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ pour conclure. Il y a BEAUCOUP d'automorphismes de corps de $\mathbb{C}$.
• En fait, on peut montrer un autre résultat avec tout ce que l'on a fait :

$$G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \sigma \rangle.$$

Le produit semi direct est donné par $\psi(\sigma)(g) = \bar{g}$ avec $\bar{g}$ l'homographie où tous les coefficients sont remplacés par leur conjugué.

Adapté du travail de Alexandre Bailleul, Corentin Caillaud, Benoît Gaudeul, Baptiste Huguet et Anne-Elisabeth Falq.