Théorème de Grothendieck

Références : : Zavidovique, *Un Max de Math*, p180
Rudin, *Analyse Fonctionelle*, p114 (pour la correction de la fin de la preuve)

Théorème.

Soit (Ω, μ) un espace de probabilité. Soit S un sous espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ qui soit inclus dans $L^\infty(\mu)$. Alors S est de dimension finie.

Démonstration. Le principe de la preuve est de se ramener dans le cadre hilbertien de $L^2(\mu)$ afin de pouvoir utiliser les propriétés associées : bases hilbertiennes, théorème de Pythagore...

• Montrons qu'il existe un $K > 0$ tel que : $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p$.
On définit l'application

$$i : \begin{array}{ccc} (S, \|.\|_\infty) & \to & (S, \|.\|_p) \\ f & \mapsto & f \end{array} .$$

Il s'agit de montrer que i est une application ouverte. L'application i est linéaire et bijective. Pour tout f dans S [1], $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ μpp. Ainsi, on a :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{1/p} = \|f\|_\infty \quad .$$

Ce qui montre que i est continue [2]. De plus S étant fermé dans l'espace de Banach $L^p(\mu)$, alors $(S, \|.\|_p)$ est lui-même un espace de Banach. Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S qui converge au sens de $L^\infty(\mu)$ vers une fonction $f \in L^\infty(\mu)$. Par continuité de l'application i, la suite $(i(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $i(f)$ au sens de $L^p(\mu)$. Or $(S, \|.\|_p)$ est un espace de Banach, donc $f \in S$. Donc S est fermé dans $L^\infty(\mu)$. Ainsi $(S, \|.\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

L'application i est donc une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach. D'après le théorème de l'application ouverte, i est donc ouverte, *id est* il existe $K > 0$ tel que $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p$.

• Montrons qu'il existe un $M > 0$ tel que : $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$.
Comme on travaille sur un espace de probabilité, $L^\infty(\mu)$, et donc S, est inclus dans $L^2(\mu)$. Si $p = 2$, le résultat est immédiat. Sinon, on doit distinguer les cas.

Si $p < 2$. On peut effectuer l'inégalité de Hölder avec $\dfrac{2}{p} > 1$. Pour toute fonction $f \in S$, on a :

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{p.2/p} \mathrm{d}\mu\right)^{p/2} (\mu(\Omega))^{1-p/2} = \|f\|_2^p \quad .$$

En passant à la racine p-ième et en utilisant l'étape précédente, on obtient : $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_2$.

Si $p > 2$. Soit $f \in S$, on a : $|f(x)|^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2$ μpp. On a donc :

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x) \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} \int_\Omega |f|^2(x) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 \quad .$$

En utilisant la première étape, on obtient : $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K^{p/2} \|f\|_2$.

On pose $M = \max(K, K^{p/2})$. On a alors : $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$.

1. on confondra f et un de ses représentants.
2. On dit que l'injection $L^\infty \hookrightarrow L^p$ est topologique

• Soient n un entier et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de S, orthonormée dans $L^2(\mu)$. Montrons que pour tout n-uplet $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ et pour μ presque tout $x\in\Omega$ on a :

$$\left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad .$$

On prend les c_i dans $\mathbb{Q}$ qui est un ensemble dénombrable dense (pour la norme 2) dans $\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on a l'existence de $\Omega' \subset \Omega$ de mesure pleine tel que pour tout $(c_i)_i$ dans $\mathbb{Q}^n$ et pour tout $x\in\Omega'$ on a : [3]

$$\left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_\infty \quad .$$

Or d'après l'étape précédente et comme $\sum_{i=1}^n c_i f_i \in S$ (car S est un espace vectoriel),

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_\infty \leqslant M\left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_2 \quad .$$

De plus d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \left\|f_i\right\|_2^2 \quad .$$

Comme la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est normée, alors pour tout $1\leqslant i\leqslant n, \|f_i\|_2^2=1$. Ainsi, on a :

$$\forall (c_i)_i\in\mathbb{Q}^n, \forall x\in\Omega', \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad .$$

Puis comme $(c_i)_i \mapsto \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$ est continue à x fixé (car polynomiale en les c_i) et $(c_i)_i \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ l'est aussi, on a par densité :

$$\forall (c_i)_i\in\mathbb{R}^n, \forall x\in\Omega' \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad .$$

• Conclusion.
Pour tout $x\in\Omega'$, on pose pour $1\leqslant i\leqslant n, c_i=f_i(x)$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i(x)^2}$$
$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)^2\right)^2 \leqslant M^2\sum_{i=1}^n f_i(x)^2$$
$$\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leqslant M^2$$

Ceci étant vrai pour μ presque tout $x\in\Omega$, on peut intégrer sur Ω.

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant M^2\mu(\Omega)$$
$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_2^2 \leqslant M^2$$
$$n \leqslant M^2$$

Toute famille orthonormée de S est donc de taille finie, inférieure à M^2. Ainsi S est de dimension finie, inférieure à M^2. $\square$

3. En effet, pour tout (c_i) dans $\mathbb{Q}^n$, on dispose de $\Omega_{(c_i)_i}$ tel que l'inégalité soit vérifié. Il suffit donc de vérifier que l'intersection dénombrable de mesurables pleins est pleine, ou de même qu'une union dénombrable de négligeables est négligeable.
Or $\mu\left(\bigcup \mathcal{N}_k\right) \leqslant \sum \mu(\mathcal{N}_k)=0$, donc c'est bon !

Remarques : • On peut donner un contre-exemple à l'inégalité fausse du Zavidovique. On se place sur $[0, 1]$. On prend $f_1 = 1$ et $f_2 = -\mathbb{1}_{]0,1]}$.
Alors pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_i|(x) \leqslant \|f_i\|_\infty$, mais

$$|f_1 + f_2|(0) > \|f_1 + f_2\|_\infty .$$

• Le théorème de l'application ouverte est une des principales applications du théorème de Baire. Celui-ci permet d'ailleurs de montrer le théorème de Banach-Steinhaus.
En application du théorème de l'application ouverte, il y a le théorème des isomorphismes de Banach (Tout opérateur continu bijectif sur des Banach est bicontinu.), le théorème d'équivalence des normes comparables, le théorème du graphe fermé et la non-surjectivité de la TF de L^1 dans $\mathcal{C}^0$.

Adapté du travail de Baptiste Huguet.