Formule sommatoire de Poisson

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*, problème 4.6.4 et exercice 3.4.4
Willem, *Analyse harmonique réelle*, exemple 7.29.f
Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*, p 254

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx},$$

où on a noté $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

1. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en particulier, $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Ainsi, $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+x)^2}$.
   D'où $\forall K > 0, \forall x \in [-K,K], \forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geqslant K \Rightarrow |f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n+1)^2} \leqslant \frac{M}{(|n+1|-K)^2}$.
   Donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact.
   On note F sa limite simple.
   De façon similaire, on montre que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(.+n)$ converge normalement sur tout compact, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions (on rappelle que f est $\mathcal{C}^1$) : la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en fait le théorème dit d'abord "sur tout segment de $\mathbb{R}$") et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$.

2. Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}$: $\forall N \in \mathbb{N}, \sum\limits_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum\limits_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$.
   Donc en faisant tendre N vers l'infini, on obtient $F(x+1) = F(x)$; F est donc 1-périodique.
   On va calculer ses coefficients de Fourier, pour $N \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_N(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi Nt}\,\mathrm{d}t \underset{\text{(cvu)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi Nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi Nt}e^{2i\pi Nn}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi Nt}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(N) \end{aligned}$$

   Comme F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge normalement vers F sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$ [2]

□

1. L'intégrale converge car $f(t) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
2. Rappelons que la période de F vaut 1.

Corollaire (Une distribution invariante par transformation de Fourier)**.**

On note $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$.
Alors $\delta_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et on a $\delta_{\mathbb{Z}} = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}$.

Démonstration.

1. Montrons que $\delta_{\mathbb{Z}}$ définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   D'après ce qu'on vient de faire : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k)$ est bien défini.
   Reste à montrer que $\delta_{\mathbb{Z}}$ est une distribution tempérée.
   On rappelle que $\|.\|_{n,p} : \varphi \mapsto \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \varphi^{(p)}(x) \right|$, où $n, p \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes qui définissent la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   $$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), |\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle| &\leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(k)| = |\varphi(0)| + \sum_{k \in \mathbb{Z}*} \frac{1}{k^2} \left| k^2 \varphi(k) \right| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{0,0} + \sum_{k \in \mathbb{Z}*} \frac{1}{k^2} \|\varphi\|_{2,0} \leqslant \frac{\pi^2}{3} \left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0} \right) \end{aligned}$$
   Ainsi, $\delta_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. On peut donc calculer sa transformée de Fourier, en utilisant la formule de Poisson en 0 :
   $$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \widehat{\varphi} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle.$$
   Donc $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}}$.

□

Corollaire (Formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)**.**

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors
$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2i\pi x\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Soit $t \in [0,1]$, on pose $\psi(x) = e^{2i\pi tx}\varphi(x)$, alors le corollaire précédent donne (en appliquant $\delta_{\mathbb{Z}}$ à ψ)
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\widehat{\psi}}(k).$$
Cela se réécrit après quelques petits calculs :
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi tk} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\widehat{\varphi}}(k) e^{-2i\pi tk}.$$
Comme ces séries convergent normalement sur $[0,1]$, on peut légitimement intégrer en t (et permuter les signes somme et intégrale).
On a donc, comme $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi kt} \mathrm{d}t = \delta_{k,0}$, l'égalité $\varphi(0) = \widehat{\widehat{\varphi}}(0)$.

On applique cette formule à $\zeta(x) = \varphi(x+t)$ (avec $t \in \mathbb{R}$ cette fois), ainsi, comme $\widehat{\zeta}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{2i\pi\xi t}$ et $\widehat{\widehat{\zeta}}(x) = \widehat{\widehat{\varphi}}(x-t)$, on a
$$\varphi(t) = \zeta(0) = \widehat{\widehat{\zeta}}(0) = \widehat{\widehat{\varphi}}(-t).$$
C'est bien la formule d'inversion de Fourier ! □

Remarques : • Pour tout faire dans les temps, il vaut mieux connaître par coeur toutes les propriétés liées à la compatibilité entre l'opérateur translation et la transformée de Fourier.
• On a aussi un autre résultat (Gourdon).

Corollaire (Une égalité entre deux sommes)**.**

On a
$$\forall s > 0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}.$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$, on va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$, où on a posé $u = \sqrt{\alpha}t$ et $\forall x \in \mathbb{R}, I(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u$.
On va chercher une équation différentielle vérifiée par I ;

→ I est dérivable, en effet : posons $h : (x,u) \mapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$.
- — $\forall x \in \mathbb{R}, h(x,.)$ est $\mathcal{C}^1$ et intégrable (par comparaison avec l'intégrale de Gauss) ;
- — $\forall x, u \in \mathbb{R}, \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u) = -2i\pi \dfrac{u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$;
- — $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall x, u \in \mathbb{R}, \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \dfrac{2\pi u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}$, fonction majorante à la fois intégrable et indépendante de x.

On en déduit en plus que $I'(x) = \dfrac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u$.

→ Par une intégration par parties :
$$\begin{aligned} I(x) &= \left[e^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -2u e^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u \\ &= 0 - \frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \frac{\sqrt{\alpha}}{-2i\pi} I'(x) = -\frac{\alpha}{2\pi^2 x} I'(x) \end{aligned}$$

Donc $I(x) = I(0) \exp\left(-\dfrac{\pi^2 x^2}{\alpha}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\dfrac{\pi^2 x^2}{\alpha}\right)$.

Ainsi, $\widehat{f}(n) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\dfrac{\pi^2 n^2}{\alpha}\right)$.

On applique la formule de Poisson en 0 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$.

On pose enfin $s = \dfrac{\pi}{\alpha}$, et alors : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2\pi}{s}} = \sqrt{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}$. □

Adapté du travail de Florian Lemonnier et sur une idée de Clément Vince.