Équation de la chaleur

Références : Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, p 105
Evans, *Partial differential equations*, p 63

Dans ce développement, on se propose de résoudre l'équation de la chaleur à l'aide des séries de Fourier.

Soient L un réel non nul et $Q =]0, L[\times]0, \infty[$. Considérons le problème

$$(EC) : \begin{cases} u \in \mathcal{C}(\overline{Q}) & u \in \mathcal{C}_1^2(Q) \quad (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & (t,x) \in Q \quad (2) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, \infty[\quad (3) \\ u(x,0) = h(x) & x \in [0, L] \quad (4) \end{cases}$$

où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, L]$ vérifiant $h(0) = h(L) = 0$ et où $\mathcal{C}_1^2$ est l'espace des fonctions dérivables deux fois en espace et une fois en temps.

Théorème.

Le problème (EC) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.

Démonstration. • Analyse par séparation des variables :
L'idée est de chercher des solutions de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$ (séparation des variables). Alors (2) est équivalent à $f(x)g'(t) = f''(x)g'(t)$ sur Q. Supposons que f et g ne s'annulent pas sur Q alors

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}, \forall (x,t) \in Q.$$

Les deux membres de cette équation sont donc égaux à une certaine constante $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x), & x \in]0, L[\\ g'(t) = \lambda g(t), & t \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

Trois cas se présentent à nous :

1. Si $\lambda > 0$, alors $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Puis on a $f(0) = f(L) = 0$ donc $A = -B$ et $A\sinh(\sqrt{\lambda}L) = 0$. On en déduit $f = 0$ et $u = 0$, ce qui ne convient pas à la condition (4) en général.
2. Si $\lambda = 0$, $f(x) = Ax + B$ et les conditions aux bords donnent à nouveau $u = 0$.
3. Si $\lambda < 0$, on pose ξ une racine de $(-\lambda)$, alors $f(x) = A\cos(\xi x) + B\sin(\xi x)$ et $g(t) = e^{-\xi^2 t}$. Les conditions de bord donnent $A = 0$ et $B\sin(\xi L) = 0$, d'où $\xi = \dfrac{n\pi}{L}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

On a donc trouvé une famille de solutions possibles donnée par

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, n \in \mathbb{Z}.$$

Néanmoins, il n'est pas dit qu'une de ces solutions puisse vérifier (4). On va donc chercher une solution sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

• Synthèse :
Soit h_1 la fonction définie sur $[-L, L]$ par

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases}.$$

Comme $h(0) = 0$, il s'ensuit que la fonction h_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-L, L]$. Considérons à présent H la fonction $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec h_1 sur $[-L, L]$. Étant donné que $h(L) = 0$, H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de H converge uniformément et normalement sur $\mathbb{R}$ vers H. H est une fonction impaire donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

avec

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx$$

et la série $\sum b_n$ converge absolument. Ainsi, la fonction

$$u : \begin{array}{ccc} \overline{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \end{array}$$

est continue d'après le théorème de continuité sous le signe somme. Montrons qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q. On pose pour cela pour tout entier naturel non nul n

$$u_n : \begin{array}{ccc} \overline{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \end{array}.$$

Alors :

1. Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.
2. Soit $[\varepsilon, \infty[\subset]0, \infty[$. Alors les différentielles partielles d'ordre k des u_n sont majorées (uniformément) sur $]0, L[\times[\varepsilon, \infty[$ par un terme de la forme

$$C_k\,|b_n|\,n^{2k}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\varepsilon\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente étant donné que la suite de terme général $n^{2k}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\varepsilon\right)$ est bornée et la série $\sum b_n$ converge absolument.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, u admet des dérivées partielles dans les directions x et t et elles sont continues. Comme les dérivées partielles de u sont continues, u est $\mathcal{C}^1$.
On peut itérer ce raisonnement autant de fois que l'on veut et cela montre que u est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.

Pour terminer, il ne reste plus qu'à montrer que u est solution de notre problème. Dans le point précédent, on a montré que u satisfait (1). De manière immédiate, il vient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t,x) \in Q : \frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

et donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, u vérifie (2). Enfin, pour tous t réel strictement positif et x élément de $[0, L]$:

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(0)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) = u(L,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = h(x),$$

donc u satisfait les points (3) et (4), ce qui achève la démonstration. □

Théorème.

Le problème (EC) admet une unique solution. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.

Démonstration. On va utiliser une méthode d'énergie.
Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de la chaleur. On pose $w = u_1 - u_2$ alors w vérifie

$$\begin{cases} w \in \mathcal{C}(\overline{Q}) & w \in \mathcal{C}_1^2(Q) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) = 0 & (t,x) \in Q \\ w(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial Q \end{cases}.$$

On pose l'énergie

$$e(t) := \int_{[0,L]} w^2(x,t)\mathrm{d}x, \quad t \in [0,\infty[.$$

Alors en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale sur tout compact de $[0,\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) &= 2\int_{[0,L]} w\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{[0,L]} w\Delta w \mathrm{d}x \\ &= 2\left[w\nabla w\right]_0^L - 2\int_{[0,L]} \nabla w.\nabla w \mathrm{d}x \\ &= -2\int_{[0,L]} \left|\nabla w\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

D'où on en déduit

$$\forall t \in [0,\infty[, e(t) \leqslant e(0) = 0.$$

Or comme e est positif, $e = 0$ et $w = 0$.
On a bien l'unicité. □

Remarques : • On retrouve la propriété de régularisation de l'équation de la chaleur, ainsi que sa propagation à vitesse infinie, et sa non-réversibilité.
• Originellement, Fourier a résolu l'équation de la chaleur de cette manière. Néanmoins il n'a rien justifié des convergences et existence de ses sommes...
• On peut aussi prouver l'unicité par le principe du maximum (difficile).

Lemme (Principe du maximum pour l'équation de la chaleur)**.**

Soit $u \in \mathcal{C}(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ telle que

$$\forall (x,t) \in Q : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \geqslant 0.$$

Soient $T > 0$ et $K = [0,L] \cap [0,T]$. Alors :

$$\sup_{(x,t)\in K} u(x,t) = \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u(x,t).$$

Démonstration. Considérons l'opérateur différentiel

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon : (x,t) \mapsto u(x,t) + \varepsilon x^2$ qui vérifie $Pu_\varepsilon \geqslant 2\varepsilon$ sur Q. Soit $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ un point de K où u_ε atteint son maximum sur K. Supposons par l'absurde de m_ε n'appartienne pas à $K \cap \partial Q$. Alors :

$$\begin{cases} 0 < x_\varepsilon < L \quad \text{donc} \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(m_\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) \leqslant 0, \\ 0 < t_\varepsilon \leqslant T \quad \text{donc} \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) = \lim\limits_{h\to 0\,:\,h<0} \left(\dfrac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{-h}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

Il en résulte que $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \leqslant 0$ ce qui contredit $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \geqslant 2\varepsilon$. Ainsi, $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ puis :

$$\sup_{(x,t)\in K} u(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in K} u_\varepsilon(x,t) = \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u_\varepsilon(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u(x,t) + \varepsilon L^2.$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour conclure. $\square$

Pour prouver l'unicité, on se donne u_1 et u_2 deux solutions du problème, puis on pose $v = u_1 - u_2$. Alors, le principe du maximum prouve que $v = 0$, car v est nulle sur ∂Q.

Adapté du travail de Paul Alphonse.