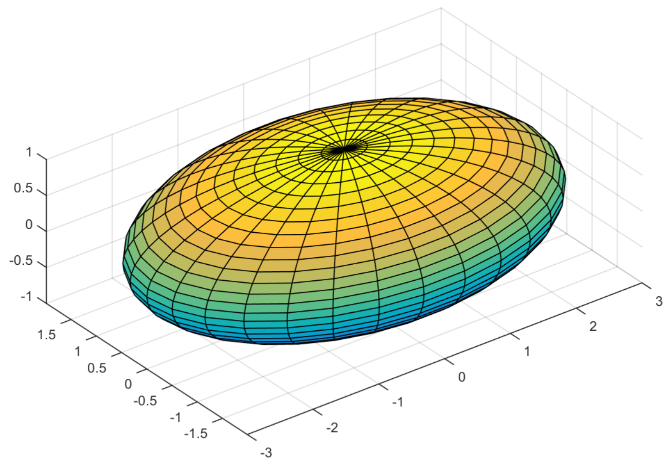
Ellipsoïde de John-Loewner

Références : : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*, 3.37

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
Un ellipsoïde centré en l'origine est une quadrique définie par une équation du type $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} = 1$, quitte à appliquer la méthode de Gauss. Un ellipsoïde plein centré en l'origine est donc défini intuitivement par l'équation $q(x) \leqslant 1$ où q est une forme quadratique définie positive (id est de signature $(n, 0)$). On notera ε_q l'ellipsoïde plein associé à q et Q (resp. Q^+, Q^{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, définies positives).



L'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$

Théorème.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Démonstration. • Commençons par nous donner une forme quadratique q définie positive et calculons le volume V_q de ε_q.
On utilise le théorème spectral pour dire qu'il existe une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien et orthogonale pour q. On la note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.
q s'écrit dans cette base $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$, donc $\det(q) = a_1 ... a_n$.
Le volume de l'ellipsoïde associé est $V_q = \int_{q(y) \leqslant 1} \mathrm{d}\lambda(y)$ avec λ la mesure de Lebesgue (sur la base canonique donc). On fait alors le changement de base orthonormée $x = Py$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Le jacobien vaut donc 1 car P est orthogonale.
On a donc $V_q = \int_{a_1 x_1^2 + ... + a_n x_n^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$.

On fait le changement de variable avec $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (\frac{x_1}{\sqrt{a_1}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{a_n}}) \end{array}$. On a bien un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme et le jacobien est $\frac{1}{\sqrt{\prod a_i}}$.

On note $D(q)$ le déterminant de q dans n'importe quelle base orthonormée, alors on a $V_q = \frac{1}{\sqrt{D(q)}} \int_{x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n =$

$\dfrac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$ où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne. [1]

$\rightarrow$ Le problème se ramène donc à celui-ci : il existe une unique forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et pour tout $x \in K$, $q(x) \leqslant 1$.
On introduit maintenant la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$ sur l'espace Q [2] et on définit l'ensemble $\mathcal{A} = \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\} \subset Q$. On va chercher à maximiser D sur ce domaine.

- $\mathcal{A}$ est convexe :

$\lambda q + (1-\lambda)q'$ est une forme quadratique positive.
De plus, $\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$ pour $x \in K$. Donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est fermé :

Soit q_n une suite de $\mathcal{A}$ convergeant vers q dans Q. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|q(x) - q_n(x)| \leqslant N(q - q_n)\|x\|^2$, donc $q_n(x) \rightarrow q(x)$.
Comme pour tout n, pour tout x, $q_n(x) \geqslant 0$, on a $1 \geqslant q(x) \geqslant 0$, et pour $x \in K$, $q_n(x) \leqslant 1$, donc $q(x) \leqslant 1$. Il vient $q \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est borné :

K est d'intérieur non vide [3] donc il existe $a \in K$, $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset K$.
Soit $q \in \mathcal{A}$ et $x \in B(0, r)$, alors $q(a + x) \leqslant 1$.
On applique l'inégalité de Minkowski [4] et on a $\sqrt{q(x)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} = \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(a)} \leqslant 2$ d'où $q(B(0,r)) \leqslant 4$.
On en déduit $\forall x \in B(0,1)$, $q(x) = q(rx)\dfrac{1}{r^2} \leqslant \dfrac{4}{r^2}$ et donc $N(q) \leqslant \dfrac{4}{r^2}$.

- $\mathcal{A}$ est non vide :

K est borné donc inclus dans une boule $B(0, M)$. On pose $q(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$. On a bien $q \in \mathcal{A}$ car $\forall x \in K$, $q(x) \leqslant 1$.

- Conclusion sur l'existence :

L'application D est continue (car le déterminant est continu) sur $\mathcal{A}$ compact, donc D atteint son maximum en q_0.
On a $D(x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2}) > 0$ et c'est une forme quadratique dans $\mathcal{A}$, donc $D(q_0) > 0$, d'où $q_0 \in Q^{++}$.
On a donc existence d'un ellipsoïde de volume minimal contenant K.

- Unicité :

Soit $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\dfrac{q + q_0}{2} \in \mathcal{A}$, or comme det est strictement log-concave sur les matrices symétriques définies positives, on a $D(\dfrac{q+q_0}{2}) > \sqrt{D(q)}\sqrt{D(q_0)} \geqslant D(q_0)$, ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$. □

Lemme (Log-concavité du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}$)**.**

Soient A, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, α, $\beta \in [0,1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.
Si $A \neq B$ et α, $\beta \neq 0$, l'inégalité est stricte.

Démonstration. On utilise le théorème de pseudo-réduction simultanée [5] pour écrire $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$

1. On a l'impression que le calcul du volume V_q fait ici dépend du choix de la base $\mathcal{B}$, mais ce n'est pas le cas. Si on prend une autre base orthonormée, la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale, donc le jacobien du changement de variable correspondant est 1.
2. Les sup ou max de normes sont toujours de bons candidats de normes...
3. C'est ici qu'on l'utilise !!!
4. On a le droit de l'appliquer car on est sur Q^+.
5.

avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$.[6]
On a donc $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta$ et $\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 (\det(\alpha I_n + \beta D)$.
On veut donc montrer $\det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta$, soit $\prod(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod \lambda_i\right)^\beta$, soit $\sum \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \beta \sum \ln(\lambda_i)$.
Or $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$ par concavité du logarithme. On a ainsi le résultat en sommant ces inégalités et en remontant le raisonnement.
Si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1 et on utilise la stricte concavité du log pour conclure. $\square$

Remarques : → On peut déplacer le problème en n'importe quel point de l'espace. En effet, si on prend $a \in \mathbb{R}^n$ comme nouveau centre du repère de l'espace, on opère une translation de notre compact et il reste d'intérieur non vide. On applique notre théorème et on obtient un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. On opère la translation inverse pour résoudre le problème. En effet, un ellipsoïde translaté reste un ellipsoïde.
→ On peut appliquer ce théorème sur n'importe quel espace vectoriel réel euclidien.
→ Application : FGN 3.38 : les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(E)$ maximaux pour l'inclusion sont les $\mathrm{O}(q)$ où E est un espace vectoriel réel de dimension finie et $q \in Q^{++}$.
→ Si K est un triangle équilatéral dont un des sommets est l'origine, il faut savoir déterminer l'ellipsoïde correspondant. Celui-ci passe par deux points du triangle et cela le détermine entièrement. Si on appelle a le côté du triangle, on a l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec b tel que $\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \frac{a^2}{b^2}\sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$. C'est donc un cercle.
Pour montrer qu'il passe par les deux sommets. Il suffit de dire que via une affinité orthogonale, on peut faire passer l'ellipse par un sommet. Puis si il était minimal alors il serait unique or si on tourne notre ellipsoïde, il passe par l'autre côté et contient toujours le triangle. On en déduit qu'on passe nécessairement par les deux sommets.
→ **Un prolongement du théorème :** on peut poser l'application φ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe le volume de $\mathcal{E}_{q_x}$ avec q_x l'unique forme quadratique définissant l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_x}$ centré en x de volume minimal contenant K.
Si on prouve que φ est continue, et que hors d'un certain compact le volume devient grand (l'enveloppe convexe ?), alors on aura montré qu'il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant K (et ceci sans fixer son centre).
Une preuve complète peut être trouvée dans le super livre *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements* de notre cher camarade Julien Bernis.
→ On peut se poser la question de savoir s'il existe un unique ellipsoïde de volume maximal à l'intérieur d'un compact. (Baptiste)
C'est faux ! On prend deux compacts connexes identiques disjoints. Leur union forme un compact. Mais si il existe un unique ellipsoïde dans ce compact, il est dans l'un deux sous compacts connexe. Comme ils sont identiques, on perd l'unicité.
→ Dans le Alessandri, il y a une application de l'ellipsoïde de John Loewner à la recherche des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Théorème.

Si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si A est définie positive, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP = I_n$ et ${}^{\mathrm{t}}PBP$ soit diagonale.

6. On rappelle qu'on n'a pas diagonalisé A et B ! Les λ_i ne sont pas les valeurs propres de B. On a juste trouvé une base orthogonale commune pour deux produits scalaires.