Théorème de Cartan - Von Neumann

Références : Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*, p 81-84

Théorème (Théorème de Cartan-Von Neumann)**.**

Tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Le but de la preuve est de trouver pour chaque point g de G un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local φ envoyant un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage ouvert V de g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et un sous-espace vectoriel $\mathcal{L}_G$ de $\mathcal{M}_n(R)$ tel que $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = V \cap G$.

- On peut se restreindre au cas où $g = I_n$.

En effet, l'application $t_g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme (global).
Si on trouve φ un difféomorphisme de $V(0) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $V(I_n) \subset G$, alors $t_g \circ \varphi$ est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de $g \in G$.

- On pose $\mathcal{L}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La seule chose non triviale à vérifier est la stabilité par la somme.

L'exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $D\exp(0) = I_n$ est un isomorphisme, donc exp induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I_n. On appelle L son inverse.
On voit que $DL(I_n) = I_n$. La définition de la différentiabilité donne alors $L(I_n + H) = H + o(H)$.[1]

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = I_n + \frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$. Donc pour k assez grand, on peut utiliser la formule d'inversion précédente et écrire $e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = \exp\left(L\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)\right)$.
Il vient

$$\begin{aligned}
\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k &= \exp\left(kL\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)\right) \\
&= \exp\left(kL\left(I_n + \frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(k\left(\frac{A+B}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \\
&= \exp(A+B) + o(1).
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B}$.

Soient maintenant A et B dans $\mathcal{L}_G$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, e^{tA}, $e^{tB} \in G$. On a alors $\lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}}\right)^k = e^{t(A+B)}$. Or $\forall k$, $e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}} \in G$ et G est fermé, donc $e^{t(A+B)} \in G$. On en déduit donc que $A + B \in \mathcal{L}_G$.

→ On pose S un supplémentaire de $\mathcal{L}_G$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis on pose φ qui à $X = L + M \in \mathcal{L}_G \oplus S$ associe $e^L e^M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. φ est $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi'(0) = I_n$. On peut appliquer le théorème d'inversion local.
Il existe U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert de I_n, $V = \varphi(U) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Néanmoins on veut avoir $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = V \cap G$. On sait déjà que $\varphi(\mathcal{L}_G) \subset G$, donc $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) \subset V \cap G$. On va donc montrer que quitte à restreindre U, si $\varphi(X) \in G$, alors $X \in \mathcal{L}_G$, ainsi le théorème sera prouvé !

- Montrons qu'il n'existe pas de suite $(M_k)_k$ de $S \setminus 0$ de limite nulle et telle que pour tout k, $e^{M_k} \in G$.

Si c'est le cas, on pose la suite $\varepsilon_k = \frac{M_k}{\|M_k\|}$. Elle évolue dans la sphère unité fermée et dans S, donc quitte à extraire une sous suite, on peut supposer qu'elle converge (vers $\varepsilon \in S$ de norme 1). Montrons que $\varepsilon \in \mathcal{L}_G$. On

1. En fait, L est le logarithme matriciel et on peut le définir directement par $L(I_n + M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i M^{i+1}}{i+1}$ pour $\|M\| < 1$.

aura alors $\varepsilon \in \mathcal{L}_G \cap S = \{0\}$, ce qui est absurde.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{t\varepsilon} = \lim_k \exp\left(t\dfrac{M_k}{\|M_k\|}\right)$. Si on pose $\dfrac{t}{\|M_k\|} = \lambda_k + \mu_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| < \dfrac{1}{2}$, on obtient $\exp\left(t\dfrac{M_k}{\|M_k\|}\right) = \underbrace{e^{\lambda_k M_k}}_{=(e^{M_k})^{\lambda_k} \in G} \underbrace{e^{\mu_k M_k}}_{\to 1}$.[2]
On a donc $e^{t\varepsilon} = \lim_k e^{\lambda_k M_k}$ et comme G est fermé, $e^{t\varepsilon} \in G$.

• Conclusion : Supposons que l'on ne peut restreindre U tel que si $\varphi(X) \in G$ et $X \in U$, alors $X \in \mathcal{L}_G$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose de $Y_k \in V \cap G \cap B(I_n, \frac{1}{k})$ tel que son antécédent $X_k = \varphi^{-1}(Y_k)$ n'appartienne pas à $\mathcal{L}_G$. On dispose donc de deux suites $(s_k)_k \in (S \backslash \{0\})^{\mathbb{N}^*}$ et $(l_k)_k \in \mathcal{L}_G^{\mathbb{N}^*}$ telles que l'on ait : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k = l_k + s_k$. Par continuité de φ^{-1}, ces deux suites sont de limite nulle. De plus pour tout k,on a : $\varphi(X_k) = e^{l_k} e^{s_k} = Y_k \in G$. Dans ce cas, $e^{s_k} = e^{-l_k} Y_k \in G$ donc par le point précédent, on a une absurdité.
Il existe donc un ouvert U contenant 0 tel que $\varphi(U \cap \mathcal{L}_G) = \varphi(U) \cap G$ et tel que φ induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur U. □

Remarques : • $\mathcal{L}_G$ peut être égal à $\{0\}$. En fait, c'est le cas si et seulement si G est discret, donc si et seulement si G est une variété de dimension nulle (c'est à dire un ensemble de points isolés). Il vaut mieux le préciser à l'oral car certains mathématiciens pensent que c'est un abus que de parler de variétés de dimension nulle.
• L'ensemble $\mathcal{L}_G$ est en fait une sous-algèbre pour la multiplication interne du crochet de Lie (même démo que pour la stabilité par la somme). On l'appelle l'algèbre de Lie associée à G.
• La courbe $t \to \exp(tM)$ pour $M \in \mathcal{L}_G$ est une courbe dans G passant par I_n. Son vecteur tangent en $t = 0$ est M. Donc $\mathcal{L}_G \subset T_{I_n} G$. Or ils ont même dimension, donc l'espace tangent à I_n est l'algèbre de Lie.
• Applications (Mneimné-Testard) : SL_n, $\mathrm{SO}_n/\mathrm{O}_n$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$, les algèbres de Lie correspondantes sont les matrices de trace nulle et les matrices antisymétriques. Les dimensions de ces sous-variétés sont donc $n^2 - 1$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Les comportements de SO_n et O_n sont les mêmes car SO_n est un ouvert de O_n.
• C'est un développement dangereux... Il faut connaître un minimum de théorie de Lie pour le faire.

2. $\exp(\mu_k M_k)$ tend vers 1 puisque M_k tend vers 0 et μ_k borné.