Mes leçons d'agrégation

Adrien Laurent
École Normale Supérieure de Rennes

2015 - 2016

Table des matières

II Analyse et Probabilités 138

Introduction

Vous trouverez ici toutes les leçons que j'ai préparé pendant mon année d'agrégation. Je n'ai pas fait d'impasse mais j'ai passé plus de temps sur certaines leçons et j'en ai négligé quelques autres.
Je pense donc qu'une bonne manière d'appréhender ce document est d'y piocher des idées, des bouts de plan auxquels on n'aurait pas pensé, mais toujours en privilégiant ses idées et les concepts que l'on maîtrise.

J'aimerais remercier tous mes camarades de classe pour leur soutien et les (trop) nombreuses corrections qu'ils m'ont fournis.
J'en profite aussi pour remercier Florian Lemonnier pour tous ses métaplans, dont je me suis très largement inspiré.

Allez, hop ! Au travail ! Et bon courage ! =D

Quelques conseils épars

• Il faut insister sur les choix que l'on a fait dans le plan au début de l'oral, remettre en contexte la leçon. Sur une leçon bateau, il est intéressant de parler d'histoire des maths ou au moins de donner des applications de tout ce qu'on présentera.
• A là fin, redire nos développements.
• Il faut parler, ne pas juste écrire en se parlant à soi-même. Il vaut mieux dire des bêtises que de ne rien dire.
• Écrire au tableau pendant les questions ! ! ! Le jury a horreur des gens qui ne font que parler sans rien écrire en mystifiant tout !
• Il faut séparer les développements en sous parties pour que l'auditoire puisse comprendre l'*essence* de la preuve.
• Ne pas cacher le tableau, regarder l'auditoire, bien regarder sa montre de temps en temps, ne pas perdre en clarté pour gagner du temps.
• Être passionné par sa leçon, la rendre vivante !
• Il faut toujours garder en tête que le jury de l'agreg est bienveillant. Il faut juste lui tendre les perches, bien connaître ce que l'on met dans sa leçon (quitte à ce qu'elle ne soit pas savante) et il donnera les points.
• Une des questions rituelles sur le plan est "Pensez-vous avoir oublié qqch ?". Il ne faut pas prendre peur et juste dire qu'il y a des choses que l'on n'a pas mit parce qu'on ne les trouvait pas assez dans le sujet.
• Ne pas faire de partie entièrement constituée d'un développement et c'est tout.
• Le plus dur de l'oral est à mes yeux les questions. Du coup, je conseille de mettre le plus de perches possible pour rester en terrain connu, et si ça ne marche pas, il faut se battre. Il vaut mieux écrire des choses fausses, ne donner que l'idée plutôt que de ne rien écrire !
• Regarder le rapport du jury avant de faire le "plan du plan" et aussi après ! histoire de ne pas oublier un théorème important ! (comme le théorème des nombres premiers dans la 121...)
• Il faut plein d'exemples et d'applications. Il faut que l'exemple structure la leçon et pas les théorèmes ! Une bonne idée est de se donner un problème et d'essayer de le résoudre en amenant des théorèmes (ex : calculer une intégrale, trouver le nombre de dérangements...)
• Il ne faut pas prendre le jury pour un idiot. Il est rare qu'il pose vraiment des questions sans intérêt.
• Ne pas paniquer ! (facile à dire) Il faut toujours dire ce que l'on veut faire face à une question un peu chafouine, pas rester face au tableau comme un zombie...
• Se retourner vers l'auditoire de temps en temps pendant le développement pour les réveiller.
• En pratique, le jury ne fera que survoler le plan. Il pourra penser : c'est un plan prétentieux et il essaiera de nous détruire. Du coup, il vaut mieux mettre des choses que l'on maitrise parfaitement dans le plan. De plus, il attend surtout l'introduction du plan, nos motivations, nos buts, ce qu'on a pas mis, pourquoi... C'est sur ça qu'il faut insister !
• Les indices doivent être en indice... (Félix Ulmer)
• Mettre des couleurs ! ! !
• Si on ne met pas assez d'exemples, le jury risque de nous poser des questions autour de ceux manquants, et si on n'arrive pas à répondre...
• Faire un plan trop dense n'est pas une bonne chose. Il faut que le jury ait le temps de lire... On peut passer vite sur les définitions du départ pour gagner de la place.
• Si il y a un théorème sans application, on ne le met pas (par exemple, Hahn-Banach).
• On réécrit le développement au tout début de la préparation, pendant qu'on a encore les idées en place.
• On commence le développement par une rapide présentation de la méthode que l'on va utiliser.
• Pas de main dans les poches ! On prend une montre, une brosse, des craies dans les mains pour éviter ça.
• Il ne faut pas faire référence aux livres pendant l'oral.

Première partie

Algèbre et Géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

À rajouter : un peu de géométrie projective.

Remarques : rapport du jury : "Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des fonctions, voire des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2,3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. Enfin, on pourra noter que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations dont il est facile de déterminer le caractère."

Références : Calais, *Éléments de théorie des groupes*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie - Tomes 1 et 2*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Berger, *Géométrie 1*
Leichtnam, *Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS - Tome algèbre et géométrie*
Perrin, *Cours d'algèbre*

p 62 du H2G2, on a tout plein d'exemples.

Cadre : E est un ensemble, G un groupe.

I Action de groupes : définitions et premiers exemples

1 Définition et exemples

Calais : déf action de groupe, les γ_g, le noyau de l'action, correspondance avec les morphismes de permutation (en rappelant ce qu'est $\mathcal{S}(E)$).
Translation à gauche de G sur G ou $\mathcal{P}(G)$ ou G/H.
Ulmer : théorème de Cayley.
Calais : conjugaison sur G ou $\mathcal{P}(G)$, action par permutation, sur un ensemble fini.

2 Orbites et stabilisateurs

Calais : déf stabilisateur, orbite, exemples dans les cas de la translation et de la conjugaison, relation orbite-stabilisateur.
Ulmer : ex de la classe de conjugaison dans D_n, de celles de $\mathcal{S}_n$, déf action libre, transitive, ex de D_n, fidèle.
Formule des classes, de Burnside.

3 L'exemple des p-groupes

Ulmer : déf p-groupe, exemples, pts fixes d'un p-groupe (appli de la formule des classes), théorème de Cauchy, les propriétés à suivre...
Déf p-Sylow, p-clos, lien avec les distingués, théorème de Sylow (en faisant une action d'un p-groupe sur des classes à gauche), un groupe d'ordre 15 est toujours cyclique, un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

II Actions sur les espaces de matrices

1 Action par translation et équivalence

H2G2 : H2G2 : déf action par translation à gauche.
Matrices échelonnées réduites, le théorème caractérisant les orbites, exemples.
OA/Ciarlet : présentation du pivot de Gauss (à gauche) en définissant les matrices d'opérations élémentaires, complexité.
Dire que c'est pareil pour la translation à droite.
Application : la décomposition LU, le calcul rapide du déterminant.
H2G22 : l'action sur les familles libres, cône nilpotent.

L'action d'équivalence, théorème du rang, application au calcul du nombre de matrices de rang fixé dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ en rappelant les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

2 Action par conjugaison

H2G2 : déf orbite de conjugaison, le spectre/ polynôme caractéristique/minimal sont des invariants par conjugaison, CNS de diagonalisabilité, bloc de Jordan, réduction de Jordan des matrices nilpotentes.
OA : décomposition de Frobenius, la vraie réduction de Jordan, facteurs invariants.

3 Action par congruence

H2G2 : déf congruence, théorème de Sylvester sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les corps finis.
Ladegaillerie : application à la classification des coniques + dessins.

III Actions des isométries en géométrie

1 Action des isométries sur un espace affine

Mercier : définition d'une isométrie (rajouter les normes), caractérisation, lien avec le groupe orthogonal, insister sur l'action.

Audin : exemple des translations, symétries, réflexions.
Mercier : application à l'étude des angles du plan.
Audin : théorème de réduction.
Mercier : classification rapide en dim 2 (et 3).

2 Isométries conservant une partie ou un motif

Berger : définition des groupes paveurs, groupes paveurs, dessins en annexe.

Mercier : définition de $Is(P)$, structure de groupe, relation entre $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$, l'isobarycentre est laissé fixe.

• Dimension 2 : isométries conservant le polygone régulier (on regarde les isométries positives qui sont des rotations de centre O, et on obtient les rotations d'angle π/n, puis les antidéplacements ont un point fixe donc ce sont des réflexions de droite passant par O, on trouve facilement le résultat), dessin, c'est le groupe diédral.

• Dimension 3 : Ulmer : sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$
Mercier/H2G2 : groupes d'isométries du cube, du tétraèdre et d'autres solides...

IV Actions sur un espace vectoriel : théorie des représentations

Ulmer : déf représentation et lien avec les actions.
exemples, déf (ir)réductible, Maschke, ce que cela veut dire pour les matrices.
Déf caractère, les propriétés, table de caractère, exemples.
Leichtnam : Théorème de Molien

102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

À rajouter : les racines de l'unité dans l'anneau d'un corps quadratique imaginaire (voir Duverney).

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie "groupe" de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent (par exemple l'alternative "sous-groupes denses versus sous-groupes monogènes"). On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbb{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent."

Références : Arnaudiès, Fraysse, *Cours de mathématiques 1 - Algèbre*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*
Gozard, *Théorie de Galois*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*
Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, *Algorithmique*

I Nombres complexes de module 1

1 Le groupe $\mathbb{S}^1$

AF : déf $\mathbb{S}^1$, l'isomorphisme utilisant $\mathbb{S}^1$ + dessin, l'exponentielle complexe donne un morphisme surjectif sur $\mathbb{S}^1$.

2 Paramétrisation sur le cercle unité

AF : déf de cos et sin, formule d'Euler et de Moivre, on donne les cosinus et sinus des points remarquables ($\pm i$, $\pm j$ avec dessin du triangle), polynômes de Tchebychev.
Application à la définition de l'argument, argument principal et racines n-ièmes.
Audin : méthode de paramétrisation du cercle.
Combes : application à l'équation de Diophante.

3 Angles et rotations

Audin : déf rotation, groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, sa forme, son caractère abélien, déf angle orienté, la suite de surjections.

II Racines de l'unité et applications

1 Définition

Gozard (**sur tout corps**) : déf racines de l'unité, leur forme sur $\mathbb{C}$, $X^n - 1$ est séparable dans certains cas, c'est un groupe cyclique (donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
? : les sous-groupes de $\mathbb{S}^1$ sont soit cycliques donc des groupes de racines de l'unité, soit denses grâce à la connaissance des sous-groupes de $\mathbb{R}$.
Déf racine primitive, ξ^r primitive ssi $r \wedge n = 1$.
Combes : le cardinal est $\varphi(n)$, ex de $\mathbb{U}_{18}$, sous-groupes de $\mathbb{U}_n$.

2 Polynômes et extensions cyclotomiques

Perrin : déf des polynômes cyclotomiques sur tout corps, degré, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$, la formule $n = \sum \varphi(d)$, application au calcul de quelques exemples, forme de Φ_p avec p premier, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ (mais les coefficients ne sont pas toujours -1 ou 1.
Gozard : Φ_{105} et l'homomorphisme canonique permet de trouver $\Phi_{n,K}$, exemples sur $\mathbb{F}_p$.
Perrin : $\boxed{\text{Irréductibilité de } \Phi_n \text{ sur } \mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Q}$, les corollaires.
théorème de la progression arithmétique (admis) et théorème sur l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$, contre exemple de Φ_8.
Calais : les polynômes cyclotomiques sont les polynômes minimaux des racines de l'unité, déf des extensions cyclotomiques, leur degré est $\varphi(n)$ sur $\mathbb{Q}$, tout corps fini de caractéristique p est une extension cyclotomique de $\mathbb{F}_p$.
Gozard : les détails sur les extensions cyclotomiques.

3 Polygones réguliers

Ulmer : les racines n-ièmes de l'unité sur $\mathbb{C}$ forment un n-gone régulier dont le groupe d'isométries est le groupe diédral, propriétés de D_n.

Gozard : déf point constructible, un point est constructible ssi son abscisse et son ordonnée sont des nombres constructibles, théorème de Wantzel et corollaire.
Mercier : déf nombres de Fermat, petite propriété, le polynôme régulier à p^r sommets est constructible ssi $r = 1$ et p est un nombre de Fermat (on dit l'idée à l'oral : on veut rajouter des racines de l'unité donc voir si un nombre du type $\cos\left(\frac{2\pi}{r}\right)$ est dans une tour d'extensions quadratiques), $\mathcal{P}_{mn}$ est constructible ssi $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n$ l'est, on dit comment construire le polygone régulier à 2^r côtés (cercle puis bissectrices successives), puis théorème de Gauss, exemple : le polygone régulier à 17 côtés est constructible.
$\boxed{\text{Polygones réguliers constructibles}}$.

III Occurrences en théorie des représentations

1 Représentations et caractères des groupes cycliques

Serre : G abélien ssi toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 ssi tous les caractères irréductibles sont de degré 1, ce sont en fait des racines de l'unité.
Peyré : exemple : représentations irréductibles des groupes cycliques et table de caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2 Table de caractère des groupes abéliens finis

Colmez : déf TF, inversion de Fourier, déf dual.
application : théorème de structure des groupes abéliens finis avec la transformée de Fourier.
Serre : les représentations *tenseurs* irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont exactement les produits de représentations irréductibles de G_1 et G_2.
? : en application de tout ce blabla : table de V_4, de produit de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et plus si affinité...
Rauch : $Q_8/D(Q_8) \simeq V_4$, donc les 4 caractères irréductibles de V_4 peuvent être remontés en caractères irréductibles de Q_8. Puis le dernier caractère est de degré 2 (par Burnside) et est donné par la représentation matricielle des quaternions, on dessine la table.

3 La transformée de Fourier rapide

Cormen : présenter rapidement le problème, faire le graphe.
Transformée de Fourier rapide.

103 - Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients.

Questions : → Détails sur l'usage des groupes distingués dans le théorème de Lagrange
→ Culture autour des développements : $\mathcal{A}_n$ simple pour $n \leqslant 4$? De même, simplicité de SO_2, SO_4...
→ Géométrie des groupes diédraux, de $\mathcal{A}_3$, V_4...
→ $\mathcal{D}(\mathcal{A}_n)$? $Z(\mathcal{S}_n)$?
→ G infini , H sous groupe de G d'indice fini. Montrer que G non simple. [P] p17
→ $H \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, H_0 composante connexe de Id dans H. Montrer que H_0 est distingué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pose un morphisme de conjugaison ϕ sur H_0 à valeur dans H, puis comme celui-ci est continue, on sait que son image est connexe. De plus Id est dans l'image, donc $\phi(H_0)$ est inclue dans H_0. Cela termine la preuve.

Remarques : J'ai fait le choix de ne pas parler du théorème de Lagrange ou des produits semi-directs. Je trouve qu'ils sont hors sujets dans cette leçon. Le vrai but ici est de montrer la relation naturelle qui lie les structures des quotients et les sous-groupes distingués. On attend beaucoup d'exemples. Du coup s'attarder sur un certain groupe et montrer sa simplicité me paraît être un développement en plein dans le sujet.
Il est attendu qu'on fasse bien comprendre l'intérêt des concepts de simplicité, de résolubilité, etc...

Références : Calais, *Éléments de théorie des groupes*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Tauvel, *Algèbre*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*

Cadre : on notera G un groupe, e son neutre.

I Liens entre groupes distingués et groupes quotients

1 Sous-groupe distingué et exemples

On définit les automorphismes intérieurs puis les sous-groupes distingués à l'aide du Tauvel. On met quelques exemples simples : e et G sont distingués dans G, cas où G est abélien...
On précise ensuite que trouver des sous-groupes distingués permet de "dévisser" les groupes pour mieux comprendre leur constitution. ex :$\{id\} \lhd V_4 \lhd \mathcal{A}_4 \lhd \mathcal{S}_4$ nous donne une chaîne de sous groupes constituant $\mathcal{S}_4$ et à peu près stable (on précise qui est V_4).

2 Quotient et exemples

On définit le quotient avec les classes à gauche et à droite. On explicite la forme en classes du quotient (ex : $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n \cup (12)\mathcal{A}_n$) et la notion d'indice.
En application, les sous-groupes d'indice 2 sont distingués. ex : $\mathcal{A}_n$, les rotations dans D_n (DESSIN!!!!).
Intérêt : quotienter permet de rassembler des objets aux propriétés communes. ex : $L^p = \mathcal{L}^p/O$ avec O le groupe des fonctions nulles presque partout. C'est bien pratique! Nous on veut une structure sur ce quotient en plus.

3 Liens entre les deux notions

On utilise le Calais à partir d'ici (et on compare avec les deux autres aussi). Proposition fondamentale : $H \lhd G \Leftrightarrow G/H$ a une structure de groupe. On précise un peu la loi de groupe et on dit que la projection canonique est un morphisme.
ex : $n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe.
H est distingué ssi c'est le noyau d'un morphisme.
p 150-151 Calais : théorème de bijection entre sous groupes de G/H et sous groupes de G contenant H. ex : sous groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
1er théorème d'isomorphisme et son corollaire $G/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im}(f)$. Application : det donne $\mathrm{GL}_n/\mathrm{SL}_n \simeq \mathbb{C}^*$, la signature donne $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Autre application : Frobenius Zolotarev
Pour finir : 3ème thm d'isomorphisme et applications d'Ulmer : $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $(\mathcal{S}_4/V_4)/(\mathcal{A}_4/V_4) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

II Sous-groupes caractéristiques

1 Définition, premières propriétés

Tout vient du Calais. Définition de caractéristique, exemple du centre $Z(G)$, caractéristique implique distingué. contre ex : phi multiplie une permutation par une transposition donc ne laisse pas fixe $\mathcal{A}_n$
Si $K \sqsubset H \lhd G$ alors $K \lhd G$. Marche pas si seulement distingué. contre exemple : $< (12)(34) > \lhd V_4 \lhd \mathcal{S}_4$ (sans référence).

2 Groupe dérivé et résolubilité

Dans Calais, la définition du groupe dérivé, les premières propriétés

Ulmer inverse les définitions de groupe résoluble mais c'est mieux comme ça. Il donne aussi le théorème d'équivalence entre la suite de groupes distingués dont les quotients sont abéliens et le fait que $(\mathcal{D}_n(G))_n$ est stationnaire, et l'autre proposition intéressante (11.5).
On recopie Ulmer jusqu'au bout en disant que tout p-groupe d'ordre fini est résoluble et il y a plein de propriétés ultra cool dans les pages 100-101.
Intérêt : on dévisse le groupe entièrement!!!!!
OA : Frobenius-Zolotarev

III Groupes simples et de Sylow

1 Groupes simples

Dans Calais, définition, proposition sur les groupes simples abéliens, $\mathcal{S}_n$ n'est presque jamais simple, $\boxed{\mathrm{SO}_3 \text{ simple}}$, $\mathcal{A}_n$ simple, PSL_n, PSO_n sont simples "souvent".
Intérêt : simple veut dire que l'on ne peut plus "démonter" notre groupe en suite de groupes distingués. De plus si on a un morphisme de groupe sur un groupe simple, alors il est injectif !

Produits directs : si on peut décomposer un groupe en produit (non trivial), on peut obtenir facilement des sous groupes distingués. Lemme chinois. application : p, q premiers entre eux $\{0\} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$
Intérêt : on peut créer des groupes distingués simplement et montrer que certains ne sont pas simples !

2 p-groupes et théorèmes de Sylow

Définitions Dans Tauvel, deuxième théorème d'iso, application dans la preuve du théorème de Sylow. Ulmer pour tous les exemples. Corollaire : S p-Sylow de G, alors $S \lhd G \Leftrightarrow$ (S est l'unique p-Sylow de G)
Applications : un groupe d'ordre 42, 63 pas simple...

IV Représentations et sous-groupes distingués

Ulmer : les représentations de G/H donnent des représentations de G, du coup la table de caractère du quotient est inclue dans celle du groupe, ex de celle de $\mathcal{S}_3$ dans celle de $\mathcal{S}_4$.
Ulmer : la déf du noyau d'un caractère, le lemme puis le théorème sur la forme des sous groupes distingués, on dit en remarque que l'on utilise juste la représentation naturelle d'action à gauche de G sur G/H.
Application aux sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{A}_4$, D_4 et Q_8...
critère de simplicité.
Rauch ou Serre (à la fin) : recopier la table de $\mathcal{A}_5$, application à la simplicité de $\mathcal{A}_5$.

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ Simplicité de $\mathcal{S}_4$? de $\mathcal{A}_4$? V_4 est-il distingué dans $\mathcal{S}_4$?
On a $V_4 \lhd \mathcal{A}_4 \lhd \mathcal{S}_4$. Puis $V_4 \lhd \mathcal{S}_4$ car tous ces groupes sont caractéristiques...

$\rightarrow$ $V_4 \subset \mathcal{S}_5$, a-t-on encore $V_4 \lhd \mathcal{S}_5$?
Non il n'est pas stable par conjugaison.

$\rightarrow$ Expliciter le quotient $\mathcal{S}_4/V_4$.
Son cardinal est 6, il est donc isomorphe soit à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{D}_3$. Si c'est $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, alors il y a un élément d'ordre 6 dans le quotient. Or il n'y en a pas dans $\mathcal{S}_4$, donc comme l'ordre décroît en passant au quotient, il n'y en a pas dans $\mathcal{S}_4/V_4$. Donc $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathbb{D}_3$.

Remarques : Le jury attend que l'on insiste sur l'ordre des éléments d'un groupe.
Il y a tant de choses à dire sur cette leçon qu'il faut au moins avoir un fil rouge. Ici je propose la recherche des groupes de petit cardinal et la recherche d'applications jolies (je reprends le but du Ulmer). =)
On peut rajouter des représentations dans cette leçon si on les maîtrise.

Références : Ulmer, *Théorie des groupes*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 2*

On tentera tout au long de cette leçon de donner les différentes formes que peuvent prendre les groupes de petit cardinaux en utilisant les outils que l'on introduira. (On fait un tableau de classification des groupes de petit cardinal en annexe.)
On donnera aussi des exemples plus généraux de groupes finis et on donnera leurs propriétés algébriques et géométriques.

I Premiers outils d'étude des groupes finis

1 Ordre d'un élément/d'un groupe et problématique

Ulmer : déf ordre d'un groupe, exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, déf ordre d'un élément, déf groupe cyclique.
Tables de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce sont les seuls possibles pour un groupe de cardinal 4, déf isomorphisme, on dit que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes de cardinal 4 à isomorphisme près (sous-entendu avec la même table de Cayley). On dit à l'oral que trouver les groupes finis avec leurs tables, c'est un petit peu long et fastidieux...

2 Un outil puissant : le théorème de Lagrange

Ulmer : déf bijection $h \mapsto gh$, les classes ont même cardinal, déf indice, formule de l'indice et théorème de Lagrange.
Corollaire 1 : tout sous groupe d'indice 2 est distingué, application (ex 3.4) au calcul de tous les groupes d'ordre 8.
Corollaire 2 : un groupe d'ordre p est cyclique. Plus loin, le premier théorème d'isomorphisme, son corollaire donnant la structure des groupes cycliques, il existe un unique groupe d'ordre p à isomorphie près.

3 Actions de groupes

Ulmer : déf action, morphisme structurel, orbite, stabilisateur, liberté, transitivité, $\mathrm{Ker}(\phi) = \cap G_x$, exemple de l'action de $\mathbb{D}_n$ sur $\mathcal{S}_n$.
exemple de l'action de translation, ex sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorème de Cayley.
Relation orbite-stabilisateur, formule des classes+Burnside.
? : exemple d'application pour compter des bracelets, des sudokus, des coloriages de polyèdres...

II p-groupes, produit de groupes et théorèmes de Sylow

1 p-groupes

Ulmer : déf p-groupe, $|X^G| = |X|$, en corollaire : théorème de Cauchy, centre d'un p-groupe, un groupe d'ordre p^2 est abélien. En application, un groupe d'ordre 9 est abélien.

2 Produit de groupes

Ulmer : Théorème sur le produit de groupes (sert pour la base des théorèmes de Sylow), ex de $\mathcal{S}_3 =< (12) > \mathcal{A}_3$, théorème chinois, contre-exemple de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Puis si $K \subset N_G(N)$ et $N \cap K = \{e\}$, alors pour ϕ le "morphisme de conjugaison", on a $NK \simeq N \rtimes_\phi K$ (servira pour *)

3 Théorèmes de Sylow

Ulmer : déf p-Sylow, tout p-groupe distingué est contenu dans tous les p-Sylow, déf p-clos, contre-exemple de $\mathcal{S}_3$, un p-Sylow est distingué ssi il est p-clos, ex de $\mathcal{S}_3$ qui a un unique 3-Sylow.
Théorèmes de Sylow, application : un groupe d'ordre 15 est nécessairement isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
Combes : application aux groupes d'ordre pq (*), puis corollaire sur les groupes d'ordre $2q$ et enfin forme des groupes d'ordre 6 et 10.

III Groupes abéliens finis

1 Compléments sur les groupes cycliques

Combes : déf indicatrice d'Euler, nombres de générateurs, $\mathbb{U}_n$, deux groupes cycliques sont isomorphes ssi ils ont le même ordre, sous-groupes d'un groupe cyclique, produit de groupes cycliques et application à l'indicatrice d'Euler, un groupe est d'ordre premier ssi il est cyclique et simple.

2 Théorème de structure

Combes : $\boxed{\text{Théorème de structure des groupes abéliens finis}}$, suite des invariants, les trois corollaires, rajouter que le corollaire 2 donne l'exposant du groupe explicitement.
Ulmer : application au calcul des sous-groupes d'ordre 9, puis à ceux d'ordre 8 (par disjonction de cas), on rappelle la déf des quaternions.

IV Compléments sur certains groupes remarquables

1 Groupes symétriques

Ulmer : déf support et cycles, décomposition en cycles, exemple, type, classes de conjugaisons, $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.
H2G2 : groupes d'isométries du tétraèdre et du cube.
Déf signature, signature d'une transposition, c'est un morphisme, exemple, déf $\mathcal{A}_n$, d'indice 2, engendré par les 3-cycles, $\mathcal{A}_n$ est simple "souvent".

2 Groupes diédraux

Ulmer : déf géométrique + dessin, déf générateurs et relations, $\mathbb{D}_3 \simeq \mathcal{S}_3$, $\mathbb{D}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, classes de conjugaison.

3 Groupe linéaire, sous-groupes et projectivisé

Perrin : cardinaux de GL, SL, PGL, PSL, isomorphismes exceptionnels, simplicité de $\mathrm{PSL}_n(K)$ (admis !).
FGNal2 : théorème de Burnside
Ulmer : sous-groupes finis de SO_2, O_2 avec comparaison géométrique à l'oral.
$\boxed{\text{Sous-groupes finis de } \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ + solides de Platon

V Représentations des groupes finis

Ulmer : déf + bases, Maschke, Schur,...
Exemples de tables de caractères.
Leichtnam : lemme + $\boxed{\text{Théorème de Molien}}$

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Remarques : rapport du jury : "Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, et, pour les candidats confirmés, dominer les problèmes de dénombrement qui en résultent.
Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations.
Par ailleurs, un candidat qui se propose de démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$ devrait savoir donner des applications à la simplicité d'un groupe.
L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.
Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes d'un groupe, par exemple, à ceux du groupe symétrique. On note que les candidats connaissent en général les applications du groupe symétrique aux polyèdres réguliers de l'espace."

Références : Ulmer, *Théorie des groupes*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Ortiz, *Exercices d'algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, algèbre 1*
Szpirglas, *Mathématiques L3 - Algèbre*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Mercier, *Cours de géométrie*

Introduction avec le théorème de Futurama. (Merci Victor Delage !)

I Groupes de permutations

1 Outils pour l'étude des permutations

Ulmer : déf permutation sur un ensemble fini, déf $\mathcal{S}(X)$ et structure de groupe pour la loi de composition, lien avec $\mathcal{S}_n$.
Une action est un morphisme de G dans $\mathcal{S}(X)$, théorème de Cayley.
Points fixes, partie stable, support, le support est stable, conséquences sur les permutations à supports disjoints.

2 Générateurs de $\mathcal{S}_n$

Ulmer : cycle, transposition, notation, décomposition en cycles, exemple.
Type d'une permutation, déf ordre, ordre d'un cycle, ordre d'une permutation selon son type, exemple.
Décomposition en transpositions, rajouter d'autres manières de décomposer.

3 Signature et groupe alterné

Ulmer : déf signature, comment la calculer, permutations paires/impaires, déf $\mathcal{A}_n$, c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$, cardinal, ex de $\mathcal{A}_4$, générateurs.
Objectif agrégation : $\boxed{\text{Théorème de Frobenius-Zolotarev}}$, application au calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$.

II Structure des groupes symétrique et alterné

1 Sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$

Ulmer : simplicité de $\mathcal{A}_n$ + comportement pour $n \leqslant 4$.
Ortiz : le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathcal{A}_5$.
Perrin : les groupes dérivés de $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ (ne pas oublier les cas à problème), les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$.
Sous-groupe d'indice n de $\mathcal{S}_n$, le centre est toujours trivial si $n \geqslant 3$.

2 Classes de conjugaison et automorphismes

Ulmer : deux permutations sont conjuguées ssi elles ont même type, la formule de conjugaison d'un cycle, exemple où on trouve explicitement le ω, non-unicité, les différents types de $\mathcal{S}_4$.
Ortiz : classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_5$ et $\mathcal{A}_5$.

Perrin : si $n \neq 6$, tous les automorphismes de $\mathcal{S}_n$ sont intérieurs.
Ulmer : les actions sur des ensembles finis donnent les représentations par permutations.

3 Représentations sur les groupes de permutations

Rauch : table de $\mathcal{S}_3$ et lien avec le triangle ($\mathcal{S}_3 \simeq D_3$), comme $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathcal{S}_3$, la table de $\mathcal{S}_3$ s'injecte dans celle de $\mathcal{S}_4$.
$\boxed{\text{Table de } \mathcal{S}_4}$
On voit les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ dans la table : $\mathcal{A}_4$ et V_4.
Table de $\mathcal{A}_4$.
Rauch ou Serre (à la fin) : recopier la table de $\mathcal{A}_5$, application à la simplicité de $\mathcal{A}_5$.

III Quelques applications en algèbre

1 Théorie du déterminant

Grifone : déf déterminant, il est multilinéaire et alterné, compatibilité avec la permutation des colonnes et lignes, la formule explicite du déterminant, le déterminant est l'unique forme n-linéaire alternée valant 1 sur une base donnée, $\det({}^tA) = \det(A)$, les propriétés à suivre.
Mettre des exemples et le déterminant de Vandermonde.

2 Polynômes symétriques

RDO : déf succincte des polynômes symétriques avec l'action de $\mathcal{S}_n$ et des polynômes symétriques élémentaires, Σ_p est p-homogène et de degré partiel 1 par rapport à chacune de ses variables.

Szpirglas : définition du discriminant Δ avec le résultant (on fait le contraire du livre), c'est un polynôme symétrique, forme avec les racines, puis corollaire $\Delta = 0$ ssi il y a une racine multiple.
En exemple, on calcule le discriminant de $aX^2 + bX + c$ et $X^3 + pX + q$.

RDO : 1) relations coefficients-racines (plus loin dans le RDO), exemple
2) déf du poids et de l'ordre, théorème de structure et algorithme de décomposition, exemples.
3) Formules de Newton, exemples

3 Quelques groupes d'isométries

Mercier : définition de $Is(P)$, structure de groupe, relation entre $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$.
Ulmer : $\boxed{\text{Sous-groupes finis de } \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ (en écrivant le dénombrement avant dans le plan et en faisant seulement les 5 cas géométriques).
Mercier/H2G2 : groupes d'isométries (positives) des solides de Platon.

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $\mathrm{GL}(E)$. Il serait bien que les candidats unifient la présentation de la leçon en faisant correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).
À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $\mathrm{GL}(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ?
Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Certains candidats affirment que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense (et ouvert) dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$: Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que la topologie sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
La présentation du pivot de Gauss et de ses applications se justifient pleinement.
Il faut aussi savoir réaliser $\mathcal{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. Dans le même ordre d'idée, la théorie des représentations permet d'illustrer, dans les leçons plus robustes, l'omnipotence de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire."

Références : Perrin, *Cours d'algèbre*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* (très heureux de l'avoir casé ici)
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique*
Berger, *Géométrie 1*
Gourdon, *Algèbre*
Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*

Cadre : E un k-ev de dimension finie.

I Les groupes linéaire et spécial linéaire

1 Définition et interprétation matricielle

Perrin : déf $\mathrm{GL}(E)$, c'est un groupe, l'isomorphisme non canonique avec $\mathrm{GL}_n(k)$, la composition se transforme en produit (pratique).
Grifone : déf déterminant d'un endomorphisme (on suppose connu la déf sur une matrice), une matrice est inversible ssi son déterminant est non nul, formule de l'inverse.
Perrin : le déterminant est un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ dans k^*, le groupe $\mathrm{SL}(E)$ est son noyau, la suite exacte, le produit semi direct.
Cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

2 Parties génératrices, application

Perrin : déf rapide des dilatations et transvections, on dit qu'elles sont pratiques car elles ont beaucoup de points fixes, comportement par conjugaison.
Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$ et si on rajoute les dilatations, on a $\mathrm{GL}(E)$.
Ciarlet : le principe de l'algorithme de Gauss, bien expliquer, la complexité, comparer à Cramer.
Dire à l'oral qu'on a d'autres méthodes pour résoudre des systèmes linéaires : décomposition LU notamment...

3 Sous-groupes remarquables de $\mathrm{GL}(E)$

Perrin : groupes dérivés + cas exceptionnels.
Objectif agrégation : $\boxed{\text{Théorème de Frobenius-Zolotarev}}$, application à $\left(\frac{2}{p}\right)$.

Perrin : si u préserve les droites, c'est une homothétie, centres de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$, déf groupes projectif linéaire et spécial projectif linéaire, suite exacte, cardinaux des groupes projectifs sur corps finis, simplicité des PSL (admis, dire que c'est une des grandes familles de groupes simples), quelques isomorphismes exceptionnels.
Les matrices triangulaires supérieures forment un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, application au premier théorème de Sylow.

II Actions du groupe linéaire sur les espaces de matrices

1 Action par équivalence

H2G2 : l'action d'équivalence, théorème du rang, application au calcul du nombre de matrices de rang fixé dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ en rappelant les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

2 Action par conjugaison

H2G2 : déf orbite de conjugaison, le spectre/ polynôme caractéristique/minimal sont des invariants par conjugaison, CNS de diagonalisabilité, bloc de Jordan, réduction de Jordan des matrices nilpotentes.
OA : décomposition de Frobenius, la vraie réduction de Jordan, facteurs invariants.

3 Action par congruence

H2G2 : déf congruence, théorème de Sylvester sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les corps finis.
Ladegaillerie : application rapide à la classification des coniques + dessins.
H2G2 : déf dans le cas réel du groupe orthogonal d'une forme quadratique comme le stabilisateur de l'action par congruence, déf de $\mathrm{O}(p,q)$, de $\mathrm{O}(n)$.
Dans le cas hermitien, on définit les matrices unitaires.
Déf forme bilinéaire antisymétrique, forme de la matrice de b, déf du groupe symplectique.
? : les systèmes hamiltoniens sont obtenus via des PFD et donnent de bonnes applications des matrices symplectiques.

III Quelques détails supplémentaires sur le groupe orthogonal

1 Groupes et propriétés liées au groupe orthogonal

Perrin : déf SO_n, $\mathrm{O}(n)$ est compact, centres, les réflexions/retournements engendrent O/SO, les groupes dérivés, thm de réduction, connexité de SO, déf PSO, simplicité.
H2G2 : simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
(Mneimné, Testard : connexité de $\mathbb{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$.)

2 Décomposition polaire

H2G2 : décomposition polaire, formule de la norme 2, maximalité du groupe orthogonal, tout sous-groupe fini de GL_n est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$.
Étude de $\mathrm{O}(p,q)$, le corollaire.

3 Applications en géométrie euclidienne

Mercier : définition d'une isométrie vectorielle/application orthogonale, caractérisations importantes, lien avec le groupe orthogonal.
Audin : exemple des translations, symétries, réflexions + dessins.
Perrin : application à l'étude des angles du plan.
Mercier : classification rapide en dim 2 (et 3).

Berger : définition des groupes paveurs, groupes paveurs, dessins en annexe.

Mercier : définition de $Is(P)$, structure de groupe, relation entre $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$, l'isobarycentre est laissé fixe.
• Dimension 2 : isométries conservant le polygone régulier, dessin, c'est le groupe diédral.
• Dimension 3 : Ulmer : Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Mercier/H2G2 : groupes d'isométries du cube, du tétraèdre et d'autres solides + dessins.

IV Structure topologique et différentiel des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(k)$

1 Quelques éléments de topologie dans $\mathrm{GL}_n(k)$

Mneimné, Testard : GL_n est ouvert, densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
Gourdon : application : différentielle du déterminant.
Mneimné, Testard : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, application à la connexité de l'ensemble des projecteurs de rang p, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'est.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes, les SL sont connexes.

2 Structure de sous-variété de certains sous-groupes

H2G2 : un ouvert est une sous-variété de dimension n : exemple de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2. Plan tangent : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Mneimné, Testard : déf de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_G$
Gonnord-Tosel : Théorème de Cartan Von Neumann
Application : SL_n, SO_n et O_n sont des sous variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.
Mneimné, Testard : espaces tangents de SL_n, SO_n et O_n.
H2G2 : une autre sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: le groupe fermé $\mathrm{O}(p,q)$.

107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Questions : → Montrer que si toutes les représentations irréductibles sont de degré 1, alors le groupe est abélien.
Soit ρ la représentation régulière, alors on peut décomposer celle-ci :

$$\rho(gh) = \bigoplus \rho_i(gh) = \bigoplus \rho_i(g)\rho_i(h) = \bigoplus \rho_i(h)\rho_i(g) = \rho(hg).$$

Or la représentation régulière est fidèle, donc $gh = hg$.

→ Représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de degré 1 ?
Ce sont les $\rho_\lambda : p \mapsto \lambda^p$ avec λ une racine n-ième de l'unité.

→ Les caractères sont-ils des entiers algébriques ?
Oui, car ce sont des sommes de racines de l'unité, et comme les racines de l'unité sont dans l'anneau des entiers algébriques, on a le résultat.

→ Montrer que si $\chi(g) \in \mathbb{R}$ pour tout χ caractère, alors g et g^{-1} sont conjugués.
On a d'abord $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} = \chi(g)$, donc pour toute fonction centrale f, $f(g) = f(g^{-1})$. On prend donc la fonction centrale $\mathbb{1}_{C(g)}$ et on a $\mathbb{1}_{C(g)}(g^{-1}) = 1$, donc $g^{-1} \in C(g)$.

→ Quelle est la différence entre la représentation somme et la représentation tensorielle ?
Le groupe de départ est le même : c'est $G_1 \times G_2$. Ce qui change, c'est l'espace vectoriel ! Pour l'un c'est $V_1 \oplus V_2$, pour l'autre, c'est $V_1 \otimes V_2$.

Remarques : Rapport du jury : "Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit, d'une part, savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit, d'autre part, savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et savoir également trouver la table de caractères de certains sous-groupes.
On voit souvent dans les développements qu'un candidat qui sait manier les techniques de base sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations. Le caractère est un outil puissant, mais il reste un outil, ce n'est pas l'intérêt ultime de la leçon.
Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion : dans le cas où les deux représentations V et V' sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de V dans V' avec endomorphisme de V . Par exemple, diagonaliser une application linéaire de V dans V' est une faute avérée, il faut pour cela identifier V et V', ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée."
Dans cette leçon, il est demandé au candidat de montrer l'intérêt des représentations, des caractères, etc... Il est donc bon de rajouter à l'oral quelques remarques et exemples.

Références : Ulmer, *Théorie des groupes* (en remplaçant "G-module" par "représentation")
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Leichtnam, *Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS - Tome algèbre et géométrie*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*

Cadre : G groupe fini, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

I Représentations des groupes finis

1 Comment construire des représentations, exemples.

Ulmer : définition des représentations, degré, fidèle, exemples des représentations triviale, par permutations, régulière.
exemple de la signature sur $\mathcal{S}_n$.
Colmez : si G est fini, pour tout g, $\rho(g)$ est diagonalisable.
Exemple des représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Ulmer : on peut construire de nouvelles représentations avec certaines qui sont connues : représentations somme, produit, duale, sur les homomorphismes.

2 Comment déconstruire des représentations ?

Ulmer : morphisme de représentation, représentations équivalentes, sous-représentation, heuristique sur les représentations équivalentes où on doit faire un changement de base simultané, exemples de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, de V^G.
? : exemple de l'action par permutation des indéterminées sur $V = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, on a alors $\mathrm{Vect}(X_1 + ... + X_n)$ laissé fixe par tout $\mathcal{S}_n$ donc on a une sous représentation.
Ulmer : représentation irréductible, réductible, complètement réductible + cela veut dire qu'il existe un changement de base mettant sous forme de matrices par blocs simultanément les $\rho(g)$ et ces blocs ne sont pas réductibles simultanément.
Définition de l'opérateur de Reynolds, c'est un projecteur sur V^G.
Rauch : si $H \lhd G$, les représentations (resp. irréductibles) de G/H donnent des représentations (resp. irréductibles) de G, exemple des représentations de $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathcal{S}_3$ qui donnent des représentations de $\mathcal{S}_4$.
Théorème de Maschke, dire que sur $\mathbb{R}$, ça ne marche pas.
Rauch : cela veut dire qu'on peut décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles, exemple de $\mathcal{S}_3$.
? : Attention, cette décomposition n'est pas unique ! Exemple de la représentation triviale sur $\mathbb{R}^2$ qui se décompose en deux représentations triviales de degrés 1 mais on peut choisir les droites vectorielles V_1 et V_2 sur lesquelles celles-ci sont définies.
? : exemple de la décomposition de la représentation régulière qui sera utile plus tard dans les preuves d'orthogonalité.

II Caractères des groupes finis

Deux questions se posent : comment connaître les représentations irréductibles et comment, pour une représentation donnée, connaître ses facteurs irréductibles ? La théorie des caractères répond partiellement à ces deux questions.

1 Définition et corollaires de la théorie précédente

Ulmer : déf caractère, degré, isomorphe implique même caractère, fonction centrale, elles forment un espace vectoriel, les caractères sont des fonctions centrales.
Exemple des valeurs de la signature sur les classes de conjugaisons de $\mathcal{S}_4$.
Propriétés des caractères, déf des caractères irréductibles, décomposition des caractères en caractères irréductibles (Maschke bis), puis exemple de la multiplicité du caractère trivial dans cette décomposition, retour au projecteur de Reynolds et formule $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$.
Leichtnam : $\boxed{\text{Théorème de Molien}}$.

2 Orthogonalité des caractères

Ulmer : théorème de Schur.
Définition du produit scalaire, le gros théorème, le corollaire.
Exemple de l'orthogonalité de ϵ et $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{S}_3$.

3 Tables de caractères

Peyré : définition d'une table de caractère, il y a autant de lignes que de colonnes, orthogonalité des colonnes. Intérêt : visualiser l'ensemble des caractères irréductibles simplement.

Rauch : $\boxed{\text{Table de } \mathcal{S}_4}$.

On a vu que les représentations de G/H donnaient des représentations de G, du coup la table de caractère du quotient est inclue dans celle du groupe, ex de celle de $\mathcal{S}_3$ dans celle de $\mathcal{S}_4$.

On présente ensuite la table de D_4 en rappelant ses définitions géométrique et par générateurs et relations. On précise la correspondance entre isométrie et caractère de la table en insistant bien sur le fait que la théorie des représentations est aussi une théorie géométrique.

Ulmer : attention, on peut rarement reconstruire tout un groupe à partir de sa table de caractère, exemple de D_4 et Q_8 qui ont la même table et ne sont pas isomorphes (car ils n'ont pas le même nombre d'éléments d'ordre 4).

III Liens entre représentations et groupes

Les représentations peuvent servir à décrire un groupe. Notamment, elles ont permit de comprendre le monstre (avec une représentation de degré 196883), qui fut très utile pour compléter la fameuse classification des groupes finis simples.

1 Groupes distingués

Ulmer : la déf du noyau d'un caractère, le lemme puis le théorème sur la forme des sous groupes distingués, on dit en remarque que l'on utilise juste la représentation naturelle d'action à gauche de G sur G/H.

Application aux sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{A}_4$, D_4 et Q_8...

critère de simplicité.

Rauch ou Serre (à la fin) : recopier la table de $\mathcal{A}_5$, application à la simplicité de $\mathcal{A}_5$.

2 Groupes abéliens

Ulmer : si G abélien, les caractères irréductibles sont tous de degré 1 et il y en a autant que d'éléments de G. Si G non-abélien, on peut factoriser les caractères dans l'abélianisé de G, application suivante pour trouver le nombre et le degré des caractères irréductibles de Q_8.

Serre : rajouter le corollaire : G abélien ssi tous les caractères irréductibles sont de degré 1.

Peyré : table de caractère des groupes cycliques.

Serre : les représentations *tenseurs* irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont exactement les produits de représentations irréductibles de G_1 et G_2.

? : table de V_4 en application.

Colmez : déf dual, déf TF, inversion de Fourier, isomorphisme entre le bidual et G.

application : $\boxed{\text{Théorème de structure des groupes abéliens finis}}$.

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe.

Questions : $\rightarrow$ Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
Un tel automorphisme est déterminé par sa valeur en 1, qui doit être un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il vient donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

$\rightarrow$ Les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, donc c'est un groupe de type fini. A-t-il des sous-groupes qui ne sont pas de type fini ?
Oui... (lesquels ?)
Le problème est que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas abélien, sinon on pourrait lui appliquer la théorie des modules et le résultat annoncé serait vrai.

Remarques : rapport du jury : "C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.
Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable."

Références : Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Berger, *Géométrie 1*

I Groupes abéliens

1 Groupes monogènes

Calais : déf groupe monogène, il est soit isomorphe à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le corollaire, exemple du groupe des racines de l'unité, sous-groupes d'un groupe cyclique (pour Frobenius-Zolotarev), les générateurs d'un groupe monogène, leur nombre est $\varphi(n)$, ce sont les éléments inversibles du groupe multiplicatif.
Perrin : pour k corps fini, k^* est cyclique et on peut trouver ses générateurs, automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2 Groupes abéliens finis

Calais : le théorème chinois, exemple, les générateurs dans le cas cyclique, application au calcul de $\varphi(n)$. Le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.
Combes : théorème de structure des groupes abéliens finis, il existe un élément d'ordre le ppcm des ordres de tous les éléments, il existe un unique sous-groupe d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ (composantes primaires), les groupes d'ordre 600.

II Deux méthodes utiles

1 Le cas des groupes définis par générateurs et relations

Ulmer (Calais pour les détails et exemples) : simplification du passage sur les groupes libres, mettre la représentation de $\mathbb{Z}^2$, rajouter pour comparer celle de $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, celle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le groupe dicyclique, le groupe diédral. Les générateurs sont faciles à trouver pour ces groupes, utilisation des groupes dicycliques dans la classification des groupes d'ordre 12.
Déf géométrique de D_n (avec dessin), rappel sur ce qu'est le groupe dérivé (et son lien avec les parties génératrices), groupe dérivé du groupe diédral.

2 Décomposition des éléments : exemple des groupes de permutations

Ulmer : déf $\mathcal{S}_n$, cycle, transposition, décomposition en cycles, exemple, décomposition en transpositions.
Calais : différentes parties de transpositions engendrant $\mathcal{S}_n$.
Ulmer : déf signature, comment la calculer, permutations paires/impaires, déf $\mathcal{A}_n$, c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$, cardinal, ex de $\mathcal{A}_4$, générateurs de $\mathcal{A}_n$.
Perrin : d'autres générateurs.
Ulmer : application à la simplicité de $\mathcal{A}_n$ + comportement pour $n \leqslant 4$.
Perrin : les groupes dérivés de $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ (ne pas oublier les cas à problème).

III Autour du groupe linéaire

1 Parties génératrices dans $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$

Perrin : déf des dilatations et transvections, on dit qu'elles sont pratiques car elles ont beaucoup de points fixes, comportement par conjugaison, les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$.
Ciarlet : le principe de l'algorithme de Gauss, bien expliquer, la complexité, comparer à Cramer.
Dire à l'oral qu'on a d'autres méthodes pour résoudre des systèmes linéaires : décomposition LU notamment...
Mneimné, Testard : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, application à la connexité de l'ensemble des projecteurs de rang p.
Perrin : les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$.
Mneimné, Testard/Combes (en exo) : en **application** : les SL sont connexes, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'est, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes.
Perrin : groupes dérivés + cas exceptionnels.
Objectif agrégation : Théorème de Frobenius-Zolotarev, application à $\left(\frac{2}{p}\right)$.

2 Groupe orthogonal et isométries

Perrin : déf réflexion et retournement, les réflexions/retournements engendrent O/SO, groupes dérivés.
H2G2 : application : $\boxed{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ est simple}}$.
Perrin : simplicité des PSO_n.

Mercier : définition d'une isométrie vectorielle/application orthogonale, caractérisations importantes, lien avec le groupe orthogonal.

La vision géométrique des retournements et des réflexions.
Berger : définition des groupes paveurs, groupes paveurs avec le lemme sur le réseau (le but étant de trouver ses générateurs), dessins en annexe.

3 Homographies

Audin : déf homographie, c'est le groupe quotient $\mathrm{PGL}(E)$, elles sont déterminées par l'image de 3 pts, ce sont les applications conservant le birapport, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse (une inversion *analytique*), les homographies sont conformes directes (car l'application conjugué et l'inversion sont conformes indirectes).
Ladegaillerie : sphère de Riemann, dessin, les droites et cercles de $\mathbb{C}$ sont des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, 4 pts sont sur un même droite-cercle ssi leur birapport est réel.
Audin : déf division harmonique, les divisions harmoniques particulières, groupe circulaire, ses éléments sont exactement les applications conservant les "cercles" de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

109 - Représentations de groupes finis de petit cardinal.

À rajouter : représentation standard

Questions : → Table de $\mathcal{A}_4$?

→ Si χ est irréductible sur G et $H \lhd G$, a-t-on $\overline{\chi}$ irréductible sur G/H ?
Oui car si $\overline{\chi} = \overline{\chi_1} + \overline{\chi_2}$, alors $\chi = \chi_1 + \chi_2$.

Remarques : Rapport du jury : "Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer, pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles, a priori. Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathcal{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe)."

Références : Ulmer, *Théorie des groupes* (en remplaçant "G-module" par "représentation")
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Leichtnam, *Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS - Tome algèbre et géométrie*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*

Cadre : G groupe fini, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

I Représentations et caractères des groupes finis

1 Résultats principaux sur les représentations

→ Construire des représentations
Ulmer : définition des représentations, degré, fidèle, exemples des représentations triviale, par permutations, régulière.
On peut construire de nouvelles représentations avec certaines qui sont connues : représentations somme, produit.

→ Déconstruire des représentations
Ulmer : morphisme de représentation, représentations équivalentes, sous-représentation, exemples de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, de V^G.
Représentation irréductible, réductible, complètement réductible + cela veut dire qu'il existe un changement de base mettant sous forme de matrices par blocs simultanément les $\rho(g)$ et ces blocs ne sont pas réductibles simultanément.
Théorème de Maschke.
Rauch : cela veut dire qu'on peut décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles.
Ulmer : théorème de Schur.

2 Caractères des groupes finis

→ Définition et corollaires de la théorie précédente
Ulmer : déf caractère, degré, isomorphe implique même caractère, fonction centrale, elles forment un espace vectoriel, les caractères sont des fonctions centrales.
Propriétés des caractères, déf des caractères irréductibles, décomposition des caractères en caractères irréductibles (Maschke bis), puis exemple de la multiplicité du caractère trivial dans cette décomposition.

→ Orthogonalité des caractères
Ulmer : définition du produit scalaire, le gros théorème, le corollaire.
Exemple de l'orthogonalité de ϵ et $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{S}_3$.

→ Table de caractères
Peyré : définition d'une table de caractère, il y a autant de lignes que de colonnes, orthogonalité des colonnes.

→ Groupes distingués
Rauch : si $H \lhd G$, les représentations (resp. irréductibles) de G/H donnent des représentations (resp. irréductibles) de G.
Ulmer : théorème sur la forme des sous groupes distingués.
critère de simplicité.

II Groupes abéliens

1 Représentations des groupes abéliens

Serre : G abélien ssi toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 ssi tous les caractères irréductibles sont de degré 1.
Peyré : exemple : représentations irréductibles des groupes cycliques.

2 Table de caractère d'un groupe abélien

Colmez : déf TF, inversion de Fourier.
application : théorème de structure des groupes abéliens finis avec la transformée de Fourier.
Serre : les représentations *tenseurs* irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont exactement les produits de représentations irréductibles de G_1 et G_2.
Peyré : table de caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
? : en application de tout ce blabla : table de V_4, de produit de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et plus si affinité...

3 Une application : la table de Q_8

Rauch : $Q_8/D(Q_8) \simeq V_4$, donc les 4 caractères irréductibles de V_4 peuvent être remontés en caractères irréductibles de Q_8. Puis le dernier caractère est de degré 2 (par Burnside) et est donné par la représentation matricielle des quaternions, on dessine la table.

III Un peu de géométrie

La géométrie, ce sont des actions de groupe, donc des représentations de permutations !

1 Groupes diédraux

Serre : on présente les définitions géométrique et par générateurs et relations de D_n, dessin.
Classes de conjugaisons (en exo p 54), représentations de D_n (n pair/impair), on fait des dessins pour celles de degré 2 en insistant sur la géométrie derrière, puis table de caractère de D_4, D_5...
On reconnaît la table de Q_8 : D_4 et Q_8 ont la même table mais ne sont pas isomorphes (car ils n'ont pas le même nombre d'éléments d'ordre 4).

2 Groupes symétriques $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$

Ulmer : classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_3 \simeq D_3$ donc on connaît sa table et ses représentations.
Rauch : on fait quelques dessins pour expliquer les correspondances entre permutations et isométries préservant le tétraèdre/isométries directes préservant le cube.
On a de plus que, comme $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathcal{S}_3$, la table de $\mathcal{S}_3$ s'injecte dans celle de $\mathcal{S}_4$.

Table de $\mathcal{S}_4$

On voit les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ dans la table : $\mathcal{A}_4$ et V_4.

3 Groupes alternés $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$

Rauch : Comme $\mathcal{A}_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a déjà trois caractères irréductibles de degré 1, puis $\mathcal{A}_4$ est le groupe des isométries positives du tétraèdre donc on la représentation irréductible de degré 3, table de $\mathcal{A}_4$.
Rauch ou Serre (à la fin) : recopier la table de $\mathcal{A}_5$, application à la simplicité de $\mathcal{A}_5$.

110 - Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Remarques : Rapport du Jury : "Il s'agit d'une nouvelle leçon qui n'a pas encore trouvé l'affection des candidats.
Pourtant, le sujet est abordable, par exemple : le théorème de structure des groupes abéliens finis, qui a bien entendu une place de choix dans cette leçon. On pourra en profiter pour montrer l'utilisation de la dualité dans ce contexte. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée.
D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus.
Pour les candidats chevronnés, les sommes de Gauss permettent de constater toute l'efficacité de ces objets.
L'algèbre du groupe est un objet intéressant, surtout sur le corps des complexes, où il peut être muni d'une forme hermitienne. On peut l'introduire comme une algèbre de fonctions, munie d'un produit de convolution, mais il est aussi agréable de la voir comme une algèbre qui "prolonge" la multiplication du groupe.
La transformée de Fourier discrète pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, incontournables en analyse de Fourier.
On pourra y introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien d'ordre une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard."

Références : Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Ulmer, *Théorie des groupes* (en remplaçant "G-module" par "représentation")
Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Quarteroni, Sacco, Saleri, *Méthodes numériques*
Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, *Algorithmique*

Cadre : G groupe abélien fini. On suppose connu les résultats classiques de la théorie des représentations.

I Caractères des groupes abéliens finis

1 Premiers résultats issus de la théorie des représentations

Ulmer : déf caractère, degré, isomorphe implique même caractère, fonction centrale, elles forment un espace vectoriel, les caractères sont des fonctions centrales.
Propriétés des caractères, déf des caractères irréductibles, décomposition des caractères en caractères irréductibles (Maschke bis), puis exemple de la multiplicité du caractère trivial dans cette décomposition.
Serre : G abélien ssi toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 ssi tous les caractères irréductibles sont de degré 1.
Peyré : exemple : représentations irréductibles des groupes cycliques.

2 Orthogonalité des caractères

Ulmer : définition du produit scalaire, le gros théorème, le corollaire.

3 Table de caractères

Peyré : définition d'une table de caractère, il y a autant de lignes que de colonnes, orthogonalité des colonnes, table de caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Colmez : théorème de structure des groupes abéliens finis (que l'on prouvera avec la transformée de Fourier plus tard).
Serre : les représentations *tenseurs* irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont exactement les produits de représentations irréductibles de G_1 et G_2.
? : en application de tout ce blabla : table de V_4, de produit de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et plus si affinité...

4 Groupes distingués

Rauch : si $H \lhd G$, les représentations (resp. irréductibles) de G/H donnent des représentations (resp. irréductibles) de G.
Application avec l'abélianisé : $Q_8/D(Q_8) \simeq V_4$, donc les 4 caractères irréductibles de V_4 peuvent être remontés en caractères irréductibles de Q_8. Puis le dernier caractère est de degré 2 (par Burnside) et est donné par la représentation matricielle des quaternions, on dessine la table.

II Dualité et transformée de Fourier sur un groupe abélien fini

1 Algèbre d'un groupe abélien

Peyré : déf $\mathbb{C}[G]$, produit scalaire hermitien, $(\delta_g)_g$ base de $\mathbb{C}[G]$.
Déf multiplication "simple", c'est nul, déf produit de convolution, on a une algèbre (à l'oral, la convolution régularise les fonctions), prolongement des morphismes de groupe en morphismes d'algèbre (écrire qu'ils sont déterminés par leur valeur en δ_g).

2 Dual d'un groupe

• Peyré : déf dual, c'est un groupe car les caractères de degré 1 sont des morphismes, ce sont en gros des racines de l'unité.

• Dual d'un groupe cyclique : forme des éléments de $\widehat{G}$, exemples avec dessins de quelques caractères, on a $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\widehat{G}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}[G]$ (par le même type de lemme que dans Chevalley-Warning).

• Colmez (trop tordu dans le Peyré) : Dual d'un groupe abélien : $\widehat{G}$ est de même ordre que G, isomorphisme entre G et son bidual.
Application : $\boxed{\text{Théorème de structure des groupes abéliens finis}}$, comme G et $\widehat{G}$ ont même cardinal, on a l'isomorphisme $G \simeq \widehat{G}$, puis $\widehat{G}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}[G]$ dans le cas seulement abélien.

3 Transformée de Fourier

Peyré : déf TF, exemple, formule d'inversion, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme, formule de Plancherel (lien avec la TF sur L^2 à l'oral), la TF est l'unique moyen d'étendre un caractère en un morphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$, compatibilité avec la convolution, c'est un isomorphisme d'algèbre !

III Transformée de Fourier discrète

à l'oral : utilisé dans la quasi-totalité des algorithmes numériques digitaux.

1 Transformée de Fourier discrète

Peyré : le contexte, la définition, le lien avec la TF d'un groupe abélien fini, reformulation des théorèmes précédents.
Déf de la convolution circulaire, compatibilité de la TF avec elle, la convolution acyclique (rapidement).

2 Principe de la transformée de Fourier rapide

Peyré : Transformée de Fourier rapide, comparaison avec le coût naïf.

3 Multiplication rapide de polynômes et d'entiers

Cormen : la présentation théorique avec le joli schéma, la multiplication avec interpolation aux racines de l'unité est la TFD.
Peyré : application à la multiplication d'entiers.

IV Approximation numérique de solutions d'EDP par TFD

1 Quelques liens entre les deux TF

Peyré : la TF est une version continue de la TFD, la TFD approche la TF en certains points.
Di Menza (juste avant l'étude de stabilité l^2 des schémas) : les relations de translations sont tjs vérifiées, déf norme l^2, relation de Parseval.

2 Approximations de solutions par séries de Fourier

Zuily, Queffelec : on rappelle la forme de la solution de l'équation de la chaleur sur un domaine en x borné, son unicité.
Peyré : la TFD permet d'approcher les coefficients de Fourier, et donc la solution.

3 Convergence de schémas numériques pour les EDP

Di Menza : déf stabilité, exemple pour des schémas à un pas, introduction de condition CFL, graphe pour montrer ce que donne l'instabilité numérique, théorème de Lax pour prouver l'intérêt.
Quarteroni : Étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur (en insistant sur la stabilité)

120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

À rajouter : aspects algorithmiques dans Saux-Picart.

Questions : $\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ est-il cyclique ?
Non, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

$\rightarrow$ Trouver les solutions x congrues à 3 modulo 13 et 7 modulo 19.
On trouve $1 = -2 \times 19 + 3 \times 13$. L'isomorphisme chinois donne que 11×19 s'envoie sur $(1, 0)$ et 3×13 s'envoie sur $(0, 1)$. On trouve donc $x \equiv 59[247]$.

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon, souvent choisie par les candidats, demande toutefois une préparation minutieuse.
Tout d'abord, n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Il est nécessaire de bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Et pour les candidats plus étoffés, connaître une généralisation du lemme chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, faisant apparaître le pgcd et le ppcm de ces éléments.
Il faut bien sûr savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles, et ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du lemme chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents...
Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon."

Références : Risler, *Algèbre pour la licence 3*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*
Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre*
Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1*
Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Demazure, *Cours d'algèbre*
Zavidovique, *Un max de maths*
Gozard, *Théorie de Galois*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*

I Structure de l'ensemble $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

1 Structure de groupe

Risler : déf relation de congruence, déf groupe quotient $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, explicitation des classes.
$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est cyclique, les groupes monogènes sont isomorphes soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
? : exemple des racines de l'unité.
Risler : sous-groupes et quotients de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
Déf φ, a est générateur ssi $a \wedge n = 1$, pour les racines de l'unité c'est pareil, calcul de $\varphi(n)$ pour $n = p^\alpha$, $\varphi(d)$ est le nombre de générateurs d'ordre d.
Colmez : $\boxed{\text{Théorème de structure des groupes abéliens finis}}$.
? : application à la recherche de générateurs ou juste pour mieux comprendre les groupes finis.
Serre : table de caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2 Structure d'anneau

Risler : $n\mathbb{Z}$ est un idéal, donc $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est un anneau pour la multiplication, il est commutatif, les inversibles sont les générateurs, corps ssi n premier, on le note $\mathbb{F}_p$.
? : conséquence $\mathbb{F}_n$ est cyclique ssi n est premier, $\mathbb{F}_q^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.
Éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (la CNS est que $\varphi(1)$ soit d'ordre divisant $\dfrac{m}{m \wedge n}$).
Perrin : automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3 Lemme des restes chinois

On rappelle que c'est la principalité de $\mathbb{Z}$ qui donne Bézout et donc le lemme chinois.
Perrin : lemme chinois (en donnant **l'isomorphisme explicite**), contre exemple avec $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, lemme chinois pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, application à la multiplicativité de φ, compléments sur la structure de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$.
Combes : application du lemme chinois à la résolution d'un système de congruences.

II Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1 Nombre premiers

Risler : théorème d'Euler, application au théorème de Fermat, théorème de Wilson.
FGNal1 : théorème de Sophie-Germain.
Zavidovique : $\boxed{\text{Théorèmes de Chevalley-Warning et Erdös-Ginzburg-Ziv}}$.

2 Quelques algorithmes liés

Gourdon : principe du cryptage RSA.
Demazure : test de non-primalité de Fermat, témoins de Fermat, nombre de Carmichael, critère et test de Miller Rabin.

3 Carrés et sommes de carrés

• Combes : trouver les carrés sert à résoudre des équations, exemple avec $ax^2 + bx + c \equiv 0$.
Perrin : déf $\mathbb{F}_q^2$, cardinal, caractérisation, -1 est un carré ssi $q \equiv 1[4]$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.
Combes : solution de $x^2 + y^2 = pz^2$ si $p \equiv 3[4]$.

• Gozard : déf symbole de Legendre, $\left(\dfrac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$, c'est un morphisme de $\mathbb{F}_q^*$
Calcul de $\left(\dfrac{-1}{p}\right)$ et $\left(\dfrac{2}{p}\right)$, loi de réciprocité quadratique, un exemple de calcul : $\left(\dfrac{23}{59}\right) = -1$.
Objectif agrégation : $\boxed{\text{Frobenius Zolotarev}}$, application au calcul de $\left(\dfrac{2}{p}\right)$.

• Perrin : déf $\mathbb{Z}[i]$, norme, théorème des deux carrés, irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

III Polynômes irréductibles

1 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$

Gozard : $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ avec π irréductible, exemple, il existe des polynômes irréductibles de tout degré, factorisation de $X^{p^n} - X$ en irréductibles, exemple de la décomposition de $X^4 - X$, $X^8 - X$.
Francinou-Gianella : nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.
Perrin : P irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions de degré $\leqslant n/2$, application à $X^4 + X + 1$.
$X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$.

2 Irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Perrin : critère d'Eisenstein, exemples, théorème de réduction, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, contre-exemple $X^4 + 1$.

3 Polynômes cyclotomiques

Perrin : déf des polynômes cyclotomiques, degré, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$, application au calcul de quelques exemples, forme de Φ_p avec p premier, $\Phi_n \in \mathbb{K}_0[X]$ avec $\mathbb{K}_0$ le corps premier (mais les coefficients ne sont pas toujours -1 ou 1), $\Phi_{n,\mathbb{F}_p}$ est la projection de $\Phi_{n,\mathbb{Z}}$.
$\boxed{\text{Irréductibilité de } \Phi_n \text{ sur } \mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Q}$, théorème sur l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$, contre exemple de Φ_8.

121 - Nombres premiers. Applications.

À rajouter : nombres/théorème de Sophie Germain, équations diophantiennes

Questions : → On se donne la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \geqslant 3$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$. Montrer que pour p premier, $p|u_p$.
On applique la méthode classique pour trouver la forme de u_n. Le polynôme caractéristique est $P = X^3 - X - 1$ et il est premier avec P', donc les racines sont simples. On les note α, β, γ.
On a $u_n = a\alpha + b\beta + c\gamma$ avec les conditions $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$.
On "remarque" alors que si $a = b = c = 1$, les trois premiers termes marchent (en calculant $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ pour u_2).
On montre que $u_n = a\alpha + b\beta + c\gamma$, $\forall n \geqslant 3$ par récurrence en vérifiant que cela vérifie la formule. Pour cela on utilise que $\alpha + 1 = \alpha^3$ (c'est le point auquel il faut penser!!!).
Si on se place sur $\mathbb{F}_p$, tout le raisonnement reste valide et on a prit les racines dans $\overline{\mathbb{F}_p}$, on peut utiliser le Frobenius et on a $u_p = (\alpha+\beta+\gamma)^p = 0$.

→ Montrer que n est un carré ssi c'est un carré dans $\mathbb{F}_p$ pour tout p premier.
L'implication directe est claire.
Pour la réciproque, on écrit $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ et on suppose que ce n'est pas un carré, donc il existe α_{i_0} impair. Par isomorphisme chinois, on trouve un b tel que $b \equiv 1[4]$ et $b \equiv 1[p_i]$ pour $i \neq i_0$. Alors en posant, $a = 4 \times \prod_{i \neq i_0} p_i$, on a l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $ak + b$ grâce au théorème de la progression arithmétique. On en prend un, p, différent de p_{i_0}.
Alors $1 = \left(\frac{n}{p}\right) = \prod \left(\frac{p_i}{p}\right)^{\alpha_i} = \prod \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{p}{p_{i_0}}\right)$.
Je n'ai pas pu noter la suite de la démonstration (et bien sur tout le monde a compris sur le moment mais dix minutes après, plus personne ne sait répondre)...

Remarques : Il faut mettre le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet et le théorème des nombres premiers, et il faut connaître l'idée de la preuve du théorème des nombres premiers (on étudie ζ, on montre qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(z) > 0$ avec un unique pôle (simple) en 1. On définit deux fonctions moches et on étudie leurs rapports à ζ, puis on prouve l'équivalent par encadrement.)!
Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.
La plupart des choses à mettre sont en exos dans le Gourdon.

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Ramis, Warusfel, Moulin, *Cours de mathématiques pures et appliquées - Volume 1 - Algèbre et géométrie*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Calais, *Éléments de théorie des groupes*
Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*
Gozard, *Théorie de Galois*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*
Demazure, *Cours d'algèbre*

Mercier, *Cours de géométrie*
Zavidovique, *Un max de maths*

I Un peu d'arithmétique

1 Nombres premiers, premiers entre eux

Gourdon : déf nombre premier (ce sont les irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}$), nombres premiers entre eux, théorèmes de Bézout et Gauss, application à $p|\binom{p}{k}$ (dire que ça sert pour Frobenius).
Théorème fondamental de l'arithmétique ($\Leftrightarrow \mathbb{Z}$ est factoriel), application aux formes du pgcd et du ppcm.
Zavidovique : application : Théorème de Chevalley-Warning +EGZ

2 Dénombrement et localisation des nombres premiers

Gourdon : il y a une infinité de nombres premiers.
Ramis Warusfel Moulin : théorème de Dirichlet (admis) + mini résultat pour l'infinité des nb premiers de la forme $4m-1$.
Déf ζ, expression produit de ζ, puis théorème des nombres premiers (admis).

3 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Gourdon : c'est un corps ssi n est premier, théorèmes de Fermat et Wilson. Théorème chinois appliqué à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pour le décomposer comme on décompose un entier).

4 Fonctions arithmétiques

• L'indicatrice d'Euler
Gourdon : déf, multiplicativité, c'est le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$ et théorème d'Euler, formule explicite avec les nombres premiers, ex de calcul, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

• La fonction de Möbius
Francinou-Gianella : déf de μ, multiplicativité, formule d'inversion, dire qu'on s'en sert pour trouver le nombre d'irréductibles de $\mathbb{F}_q$.
Ramis Warusfel Moulin : formule liant φ et μ

II Nombres premiers en théorie des groupes

1 Résultats sur les p-groupes

Ulmer : déf des p-groupes, ex, points fixes, théorème de Cauchy, centre d'un p-groupe, groupes d'ordre p^2

2 Théorème de Sylow

Calais : déf/existence d'un groupe de Sylow, théorème de Sylow, un p Sylow est unique ssi il est distingué, si $|G| = pq$ avec p, q premiers distincts, alors G est p-clos et pas simple du coup, sous une hypothèse en plus, il est cyclique. (attention il y a une erreur dans le 6.12 du Calais).

III Corps finis

1 Propriétés des corps finis

Calais : def caractéristique, sous corps premier, ceux-ci sont isomorphes soit à $\mathbb{Q}$ soit à $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les corps finis sont de caractéristique p.
Puis un corps fini est un espace vectoriel sur tout sous-corps, en particulier sur son corps premier. On note $n = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_p]$, donc $|\mathbb{K}| = p^n$.
Perrin : Il existe un unique corps (à $\mathbb{F}_p$-isomorphisme près) de cardinal p^n. On le note $\mathbb{F}_{p^n}$.
Calais : les sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ sont les $\mathbb{F}_{p^d}$ avec $d|n$.
Le morphisme de Frobenius $\mathcal{F}$, propriétés
Gozard : l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{F}_{p^n}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par $\mathcal{F}$.

2 Carrés sur les corps finis

Perrin : déf $\mathbb{F}_q^2$, cardinal, caractérisation, -1 est un carré ssi $q \equiv 1[4]$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.
Gozard (chap 12) : déf symbole de Legendre, $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$, c'est un morphisme de $\mathbb{F}_q^*$
Calcul de $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$, loi de réciprocité quadratique, un exemple de calcul : $\left(\frac{23}{59}\right) = -1$
Sans référence : prolongement en le symbole de Jacobi
Objectif agrégation : autres utilisations du symbole de Legendre : $\boxed{\text{Frobenius-Zolotarev}}$ (qui prouve $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$)

3 Polynômes irréductibles sur les corps finis

Gozard : $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p/(\pi)$ avec π irréductible, exemple, il existe des polynômes irréductibles de tout degré, le corps de rupture est aussi un corps de décomposition, factorisation de $X^{p^n} - X$ en irréductibles, exemple de la décomposition de $X^4 - X$, $X^8 - X$, déf du nombre d'irréductibles, la formule, puis application de la formule d'inversion de Möbius.
Francinou-Gianella : $\boxed{\text{Polynômes irréductibles sur } \mathbb{F}_q}$

IV Nombres premiers remarquables et outils liés

1 Critères de primalité, nombres de Carmichael

Demazure : critère simple avec un $a \notin n\mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \not\equiv 1[n]$, dire que ce n'est pas une équivalence avec les nombres de Carmichael, le plus petit est 561, petite propriété, ils sont facteurs d'au moins 3 premiers impairs distincts, ex $561 = 3 \times 11 \times 17$.
Pour compenser ces bugs : critère de Lehmer et de Miller-Rabin, dire qu'on a un test probabiliste correspondant car $3/4$ des a sont des témoins de MR si n est composé (p 128), si on fait N tests, le risque d'erreur est $\left(\frac{1}{4}\right)^N$.

2 Nombres de Fermat et polygones constructibles

Gozard : déf point constructible, un point est constructible ssi son abscisse et son ordonnée sont des nombres constructibles, théorème de Wantzel et corollaire.
Mercier : déf nombres de Fermat, petite propriété, le polynôme régulier à p^r sommets est constructible ssi $r = 1$ et p est un nombre de Fermat, $\mathcal{P}_{mn}$ est constructible ssi $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n$ l'est, on dit comment construire le polygone régulier à 2^r côtés (cercle puis bissectrices successives), puis théorème de Gauss, exemple : le polygone régulier à 17 côtés est constructible.
$\boxed{\text{Polygones réguliers constructibles}}$

122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "C'est une leçon où les candidats ont tendance à se placer sur un plan trop théorique. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles.
Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications.
Le candidat plus cultivé peut donner des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. A ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers.
On a pu noter dans cette leçon l'erreur répandue que $1+i$ et $1-i$ sont des irréductibles premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[i]$.

Références : Perrin, *Cours d'algèbre*
Tauvel, *Cours d'algèbre*, première édition
Combes, *Algèbre et géométrie*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*
Duverney, *Théorie des nombres*
Samuel, *Théorie algébrique des nombres*

En annexe, faire le graphe avec les anneaux intègres, noethériens, factoriels, principaux, euclidiens, corps.

Cadre : A anneau commutatif intègre, $\mathbb{K}$ corps.

I Anneaux principaux, exemples

1 Idéaux et anneaux principaux

Perrin : déf idéal principal, ex des idéaux de $\mathbb{Z}$ qui sont les $n\mathbb{Z}$.
Déf anneau principal, principal implique factoriel (contre exemples : $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{K}[X,Y]$), principal implique noethérien (rappeler la déf).
? : $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel donc pas principal, mais est noethérien comme quotient d'un noethérien. On a aussi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n non premier.
Tauvel : rappel rapide sur la localisation, la localisation conserve la principalité (et le caractère euclidien).

2 Exemple des anneaux euclidiens

? : on dit qu'on donne plein d'exemples euclidiens car il est difficile d'en trouver qui ne soient pas euclidiens.
Perrin : déf euclidien, euclidien implique principal.
Exemple de $\mathbb{Z}$.
Exemple de $\mathbb{K}[X]$, $A[X]$ principal ssi A corps ssi $A[X]$ euclidien.
Exemple des décimaux et de tout anneau localisé A_s avec A euclidien, le stathme (on enlève tous les irréductibles présents dans s dans l'évaluation par le stathme, voir Tauvel).
Tauvel : séries formelles, déf valuation, c'est un stathme, $\mathbb{K}[[X]]$ est principal, les inversibles sont les éléments vérifiant $a_0 \neq 0$, les idéaux sont les (X^p), les irréductibles sont les inversibles fois X.
? : les fonctions holomorphes sur un compact forment un anneau euclidien.

Perrin : $\boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right] \text{ est principal mais non euclidien}}$.

II Arithmétique sur les anneaux principaux

1 Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

À l'oral : on dit quelles propriétés viennent du caractère factoriel et lesquelles sont vraies pour un anneau principal.
Perrin : déf divisibilité, $a|b$ ssi $b \in (a)$, l'isomorphisme $a \mapsto (a)$ (adapté en mode principal).
Combes : déf irréductible + équivalences.
? : exemple/définition du polynôme minimal.
Combes : application à la construction de $\mathbb{C}$ et d'autres extensions de corps.
Contre-exemple : $2 \times 3 \in (1 + i\sqrt{5})$, Gauss, Euclide.
Perrin : application : $\boxed{\text{Irréductibilité des polynômes cyclotomiques}}$.
Déf pgcd, ppcm (déf pour les anneaux principaux, attention).
Théorème de Bézout (important), corollaire sur les nombres premiers entre eux (en rajoutant un ssi), le contre-exemple.
Francinou, Gianella : factoriel + Bézout implique principal.

2 Lemme chinois et polynômes d'endomorphismes

Combes : théorème chinois (application de Bézout), application à la résolution d'un système de congruences.
OA : déf du morphisme d'évaluation, de $\mathbb{K}[u]$, c'est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$, déf polynôme minimal π_u grâce à la principalité de $\mathbb{K}[X]$, décomposition de $\mathbb{K}[u]$ grâce au théorème chinois, $\mathbb{K}[u]$ est un produit de corps ssi on est diagonalisable.

III Anneaux d'entiers de corps quadratiques

1 Entiers d'un corps quadratique

Combes (il faut corriger pas mal de choses) : rappel de ce qu'est $\mathbb{Q}(\delta)$, le polynôme caractéristique de l'application f_z, déf conjugué, norme, déf entier dans ce cas, forme de l'anneau des entiers.

Duverney : donner les différents cas où on est euclidien avec dessin du réseau et du pb de chercher à minimiser la distance dans le rectangle $[0,1] \times [0, |\delta|]$.

2 Unités des anneaux d'entiers quadratiques

Duverney (en précisant $d \neq 0, 1$ sinon ça marche pas) : caractérisation des unités, exemple des entiers d'Eisenstein, unités des corps quadratiques imaginaires, unités des corps quadratiques réels avec l'exemple pour $d = 5$.
Application à l'équation de Pell pour $d = 3$ (pour rester avec un anneau euclidien) avec la solution fondamentale $(2, 1)$.

3 Entiers de Gauss et d'Eisenstein

Perrin : rappel déf $\mathbb{Z}[i]$, norme, théorème des deux carrés (plus ou moins développé), irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.
Samuel : en remarque, on peut définir l'anneau principal **non commutatif** des quaternions de Hurwitz et cela donne le théorème des quatre carrés.
FG : $\boxed{\text{Équation de Nagell-Ramanujan}}$

123 - Corps finis. Applications.

À rajouter : tests de primalité, cryptographie, courbes elliptiques sur corps finis ?

Questions : → 5 est-il un carré modulo 91 ?
91 n'est pas premier, du coup soit le symbole de Jacobi vaut -1 et on n'est pas un carré, soit 5 est un carré mod 7 et 13, et par le lemme chinois, on peut conclure.

→ solutions de $y^2 = 41x + 3$?
Si il existe une telle solution, alors $y^2 \equiv 3[41]$. Or $\left(\dfrac{3}{41}\right) = -1$, donc il n'y a pas de solution.

→ Trouver un générateur de $\mathbb{F}_{31}^*$.
On a $|\mathbb{F}_{31}^*| = 30 = 2 \times 3 \times 5$. Par le lemme chinois, il suffit de trouver un élément d'ordre 2, un d'ordre 3 et un d'ordre 5. En les multipliant, on trouvera un élément d'ordre 30. Ici on voit que $-1 \times 2 \times 5 = -10$ est d'ordre 30.

→ Cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$?
On compte les bases : ça donne $\prod(p^n - p^i)$.

→ On se donne $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^3 + X^2 + 1$. Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ et $\mathbb{F}_2[X]/(Q)$.
Pour cela, il faut bien choisir sur quoi envoyer $\overline{X}$. En fait, il faut l'envoyer sur une racine de P dans $\mathbb{F}_2[X]/(Q)$. Cela découle du théorème d'isomorphisme : on veut quotienter notre morphisme d'inclusion $\mathbb{F}_2[X] \to \mathbb{F}_2[X]/(Q)$ par (P).

Remarques : Les polynômes irréductibles sont une application des corps finis.
Il y a plein de petits exos à savoir faire. Il faut s'entraîner !
On peut rajouter les pages 105 à 107 du Perrin sur l'algèbre linéaire, mais je trouve que ça n'apporte pas grand chose d'autre que de la difficulté.

Références : Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*
Gozard, *Théorie de Galois*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Demazure, *Cours d'algèbre*, nouvelle édition !
Serre, *Cours d'arithmétique*
Zavidovique, *Un max de maths*
Francinou, Gianella, *Exercices d'algèbre*

Cadre : On se donne $\mathbb{K}$ un corps fini.

I Définition et structure des corps finis

1 Premières propriétés des corps finis, existence, unicité

Calais : def caractéristique, sous corps premier, ceux-ci sont isomorphes soit à $\mathbb{Q}$ soit à $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les corps finis sont de caractéristique p.
Puis un corps fini est un espace vectoriel sur tout sous-corps, en particulier sur son corps premier. On note $n = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_p]$, donc $|\mathbb{K}| = p^n$. (du coup, pas de corps de cardinal 42)
Perrin : Il existe un unique corps (à $\mathbb{F}_p$-isomorphisme près) de cardinal p^n. On le note $\mathbb{F}_{p^n}$.

2 Le groupe des inversibles $\mathbb{F}_{p^n}^*$

Calais : c'est un groupe cyclique.
Théorème de l'élément primitif appliqué à $\mathbb{F}_{p^n}$ sur $\mathbb{F}_{p^d}$, c'est donc une extension simple. Remarque avec le générateur de $\mathbb{F}_{p^n}^*$, contre-exemple pour dire que si $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p(\alpha)$, alors α n'est pas forcément un générateur de $\mathbb{F}_{p^n}^*$.

3 Structure de $\mathbb{F}_{p^n}$

Calais : les sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ sont les $\mathbb{F}_{p^d}$ avec $d|n$.
Sans référence : on ajoute le dessin des extensions de $\mathbb{F}_2$
Le morphisme de Frobenius $\mathcal{F}$, propriétés
Gozard : l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{F}_{p^n}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par $\mathcal{F}$.
Calais : $\mathbb{F}_{p^n}$ est un corps parfait, c'est même une extension de $\mathbb{F}_{p^d}$ normale, séparable.

II Carrés dans $\mathbb{F}_{p^n}$

1 Généralités sur $\mathbb{F}_q^2$

Perrin : déf $\mathbb{F}_q^2$, cardinal, caractérisation, -1 est un carré ssi $q \equiv 1[4]$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.

2 Symbole de Legendre

Gozard (chap 12) : déf symbole de Legendre, $\left(\dfrac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$, c'est un morphisme de $\mathbb{F}_q^*$
Calcul de $\left(\dfrac{-1}{p}\right)$ et $\left(\dfrac{2}{p}\right)$, loi de réciprocité quadratique, un exemple de calcul : $\left(\dfrac{23}{59}\right) = -1$
Sans référence : prolongement en le symbole de Jacobi
Objectif agrégation : autres utilisations du symbole de Legendre : $\boxed{\text{Frobenius-Zolotarev}}$ (qui prouve $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$)

3 Formes quadratiques sur un corps fini

Perrin : discriminant, le lemme et le thm de réduction sur $\mathbb{F}_p$, il y a 2 classes d'équivalence de formes quadratiques.

III Polynômes sur $\mathbb{F}_q$

1 Clôture algébrique

Calais : $\mathbb{F}_{p^n}$ n'est pas clos car un corps fini n'est jamais clos ! ex : $1 + \prod_{a \in \mathbb{F}_{p^n}} (X-a)$
$\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^{k!}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$.

2 Polynômes irréductibles

- Polynômes irréductibles et corps finis

Gozard : $\mathbb{F}_{p^n}$ est le corps de rupture d'un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_p$, le corollaire, la décomposition de $X^{p^n} - X$ en produit de polynômes irréductibles, corollaire sur le cardinal et formule avec la fonction de Möbius, exemples de polynômes irréductibles.

Francinou Gianella : Irréductibles de $\mathbb{F}_q$.

Sans référence : décomposition de $X^{2^3} - X$

Perrin : P irréd ssi P n'a pas de racines dans les extensions de $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à $n/2$, exemple avec $X^4 + X + 1$, puis théorème de réduction sur $\mathbb{Z}$ et exemples, contre-exemple pour la réciproque avec $X^4 + 1$.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

Demazure : décomposition des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_q$, CNS d'irréductibilité en disant que q doit engendrer $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$, exemple avec ϕ_7 sur $\mathbb{F}_2$.

3 Polynômes à plusieurs variables

Serre + Zavidovique : Chevalley-Warning+EGZ

124 - Anneau des séries formelles. Applications.

Remarques : rapport du jury : "C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices : combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, etc.
A ce propos, on note que les candidats qui choisissent de présenter en développement les séries de Molien ne savent que rarement interpréter les séries obtenues sur des exemples simples. Ces séries ne font pas que calculer les dimensions de sous-espaces d'invariants, elles suggèrent aussi des choses plus profondes sur la structure de l'algèbre d'invariants."

Références : Tauvel, *Cours d'algèbre*
Saux Picart, *Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux*
Ramis, Deschamps, Odoux, *Algèbre 1*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - algèbre 1 et analyse 2*
Leichtnam, *Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS - Tome algèbre et géométrie*
Foata, Franchi, Fuchs, *Calcul des probabilités*

Cadre : A anneau commutatif unitaire, $\mathbb{K}$ corps.

I Structure de $A[[X]]$

1 L'algèbre $A[[X]]$

Tauvel : déf de l'ensemble sous-jacent, notation $\sum a_n X^n$, les e_n, les opérations, injection des polynômes. valuation, propriétés.
Caractérisation des inversibles, exemple.
Condition d'intégrité, de principalité de $A[[X]]$, $\mathbb{K}[[X]]$ est euclidien, ses idéaux, il est local, irréductibles.

2 Topologie de $A[[X]]$

Tauvel : déf distance, elle est ultramétrique, densité des polynômes, complétude, CNS de convergence d'une série.

3 Quelques exemples

À partir d'ici, on se place sur $\mathbb{K}[[X]]$.
Tauvel : **définitions** des séries formelles classiques.

4 Opérations

Tauvel/Saux Picart : déf D, dérivée de exp, petites propriétés, les a_i sont donnés par $\dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$ (attention on n'as pas le droit d'évaluer, sauf en 0 ! ! !), les primitives.

Tauvel : on définit la substitution en précisant qu'il y a des problèmes de sommabilité mais qu'on n'en parlera pas, compatibilité avec la valuation.
RDO : propriétés de la composition, petit exemple.
Tauvel : formule de dérivation composée, réversion d'une série formelle, application à log, exp, sin, ...

II Séries génératrices et fractions rationnelles

1 Séries formelles et fractions rationnelles

Saux Picart : l'injection dans $\mathbb{K}[[X]]$ des fractions rationnelles sans pôles.
RDO : un exemple de développement en série formelle avec décomposition en éléments simples.

2 Séries génératrices, exemples

Saux Picart : déf série génératrice, exemples.
FGNal1 : nombres de dérangements (2).
FGNan2 : Partitions d'un entier en parts fixées.

3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Saux Picart : déf suite récurrente linéaire, une suite est récurrente ssi sa série génératrice est une fraction rationnelle avec dénominateur inversible, la méthode, exemple de Fibonacci.
exemple des nombres de Stirling.

III Liens avec les équations différentielles

1 Premiers exemples

Saux Picart : l'équa diff $E' = aE$.
Tauvel : $\alpha A = (1+X)A'$.
FGNal1 : nombres de Bell, en remarque : on est obligé de passer en séries entières.

2 Suites P-récurrentes et séries Δ-finies

Saux Picart : déf suites P-récurrentes, exemple de l'exo 3.
FGNal1 : nombre de dérangements (3). Saux Picart : déf séries Δ-finies (avec un Q de l'autre côté), exemple des fractions rationnelles, lien entre suites P-récurrentes et séries Δ-finies, conséquence importante (non triviale) : toute équa diff formelle à coefficients polynomiaux possède une solution, exemple.

3 Application aux nombres de Catalan

Saux Picart : détailler l'exemple.

IV Autres applications

Leichtnam : Théorème de Molien.
? : lien avec les éléments engendrant A^G.

FGNal1 : exemple des formules de Newton (à faire dans $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$), quelques exemples, enjeu de savoir les calculer.

FFF : fonction génératrice des moments (?)

125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "Très peu de candidats ont choisi cette leçon. On doit y voir le théorème de la base télescopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon."

Références : Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*
Gozard, *Théorie de Galois*
Perrin, *Cours d'algèbre*
Mercier, *Cours de géométrie*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*

I Corps et extensions

1 Extension et degré d'une extension de corps

Gozard/Calais : déf corps, caractéristique, exemples, sous-corps premier, liens avec le cardinal du corps, contre exemple de $\mathbb{F}_p[X]$.
Déf extension de corps, exemples sympathiques, c'est un espace vectoriel, notation L/K, exemple de $\mathbb{K}(\alpha)$.
Degré, exemples, thm de la base télescopique, corollaire sur la multiplicativité du degré.
? : exemple de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

2 Extensions algébriques

Perrin/Gozard : déf élément algébrique/transcendant, polynôme minimal, les critères, exemples, théorème de Hermite et Lindemann (admis), le degré de l'extension est le degré du polynôme minimal, base correspondante.
Déf extension algébrique, degré fini implique algébrique, contre exemple de $\overline{\mathbb{Q}}$.

II Adjonction de racines

1 Corps de rupture

Recopier Gozard pour le cours et Perrin pour les exemples.

2 Corps de décomposition

idem
Perrin : tout sur les corps finis.
Francinou, Gianella : $\boxed{\text{Polynômes irréductibles de } \mathbb{F}_q}$.

3 Clôture algébrique

idem

III Constructibilité à la règle et au compas

1 Résolution des problèmes grecs

Mercier : déf constructible, constructions de la somme, du produit, de la racine carrée (dessins!!!), théorème de Wantzel, corollaire.
Les 3 problèmes grecs.

2 Automorphismes de corps

Gozard : déf $\mathbb{K}$-automorphisme, déf "groupe d'automorphismes", $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$, groupe de Galois d'une extension monogène.
Calais : exemples.
Francinou, Gianella : $\boxed{\text{Automorphismes de } \mathbb{K}(X)}$.

3 Application à la constructibilité de polygones réguliers

Mercier : position du problème, le groupe de Galois étudié.
$\boxed{\text{Polygones réguliers constructibles}}$.

126 - Exemples d'équations diophantiennes.

Remarques : rapport du jury : "Il s'agit d'une leçon nouvelle, ou plus exactement d'une renaissance. On y attend les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, mais aussi bien entendu la méthode de descente et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.
La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain)."

Références : Perrin, *Cours d'algèbre*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Audin, *Géométrie*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*
Duverney, *Théorie des nombres*
Samuel, *Théorie algébrique des nombres*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie - tome 2*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - algèbre 1 et analyse 2*

Combes : Définition d'une équation diophantienne (cette définition est un peu simpliste, mais bon...).

I Équations linéaires

1 Résolution avec une ou deux variables

? : $ax = b$ a une solution ssi $a|b$.
Combes : lemme de Gauss, théorème de Bézout, résolution de $ax + by = c$, exemple.

2 Résolution avec n variables

OA : la décomposition de Smith, on se ramène ainsi à résoudre $ax = b$.
FGNan2 : Partitions d'un entier en parts fixées (quand on veut des solutions sur $\mathbb{N}$).

3 Lemme chinois

Combes : lien entre équations modulaires et équations diophantiennes, lemme chinois, exemple d'application. On dit que c'est plus simple à appliquer pour nous mais Smith est bien mieux.

II Méthodes géométriques

1 Paramétrisation rationnelle de courbes

Combes : l'équation $x^3 + y^3 = xyz$ avec la paramétrisation rationnelle du folium de Descartes.
Audin/Combes : d'autres exemples de paramétrisation si on a la place.

2 Structure de groupe sur une conique

H2G22 : déf de la loi $*$, cela définit un groupe, exemple dans le cas de l'hyperbole.

Équation de Pell-Fermat.

III Utilisation d'anneaux d'entiers de corps quadratiques

1 Entiers d'un corps quadratique

Combes/Duverney : rappel de ce qu'est $\mathbb{Q}(\delta)$, déf conjugué, norme, déf entier dans ce cas, forme de l'anneau des entiers, exemples de $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[j]$.

2 Unités des anneaux d'entiers quadratiques

Duverney (en précisant $d \neq 0, 1$ sinon ça marche pas) : caractérisation des unités, exemple des entiers d'Eisenstein, unités des corps quadratiques imaginaires, unités des corps quadratiques réels.
Application à l'équation de Pell-Fermat (on retrouve les résultats précédents).

3 Utilisation de la factorialité

Duverney : cas où les anneaux d'entiers sont euclidiens, application aux équations de Mordell.
Perrin : théorème des deux carrés.
Samuel : théorème des quatre carrés, même méthode qu'avant mais avec les quaternions.
Francinou, Gianella : Équation de Nagell-Ramanujan.

IV Équations de Fermat

Combes : grand théorème de Fermat (admis).

- Combes/Audin : cas $n = 2$ avec la paramétrisation du cercle.
- Combes : $x^2 + y^2 = pz^2$ avec le principe de descente infinie (à détailler).
- Combes : cas $n = 4$ avec le cas $n = 2$ et le principe de descente infinie.
- Duverney : cas $n = 3$ avec les anneaux d'entiers quadratiques.
- FGNal1 : Théorème de Sophie Germain.

127 - Droite projective et birapport.

Remarques : rapport du jury : "Il s'agit également d'une leçon récemment introduite et reprenant un titre ancien. Le birapport peut être vu comme un invariant pour l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ (ou plus finement son quotient projectif $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$) sur l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ des droites du plan vectoriel $\mathbb{K}^2$.
Lorsque le corps $\mathbb{K}$ est le corps des complexes, il ne faudra pas manquer d'en voir les applications à la cocyclicité, et à l'étude des droites et cercles du plan affine euclidien.
On peut s'aider du birapport, sur des corps finis, pour construire des isomorphismes classiques entre groupes finis de petit cardinal.
L'ensemble des droites du plan contenant un point fixe est naturellement une droite projective. Cela permet enfin d'identifier une conique à une droite projective : c'est l'idéal d'une preuve classique du théorème de l'hexagramme de Pascal. Par ailleurs, on pourra remarquer le birapport dans l'expression de la distance hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré."

Références : Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Audin, *Géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Samuel, *Géométrie projective*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1*

I Espaces projectifs

1 Définition et topologie dans le cas général

Audin : définition d'un espace projectif, cas de $\mathbb{K}^n$, ce n'est pas un espace vectoriel, dimension.
On met la topologie quotient, et la projection est ouverte et continue.
Les espace projectifs réels et complexes sont compacts et connexes par arcs.
Samuel : coordonnées homogènes, définition d'un repère projectif, dénombrement des points sur un corps fini.
Audin : la décomposition de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}^n \cup ... \cup \{\infty\}$.
? : en particulier, $\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n-1} \cup \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$, cette décomposition n'est pas canonique : on peut choisir le point à l'infini, la topologie s'adapte à cette décomposition (H2G2 pour le cas de la droite projective).

2 Exemple de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$: la droite projective

H2G2 : $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un cercle (ce sont les directions de droite de $\mathbb{R}^2$), dessin.
La projection stéréographique $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}_2$, dessin.
On voit bien la compacité et la connexité par arcs maintenant !

3 Choisir la droite projective : trois théorèmes classiques revisités

Ladegaillerie : application du formalisme aux théorèmes de Pappus, de Desargues et surtout de Thalès (l'idée est d'utiliser les versions faibles affines pour démontrer les projectives, qui donnent alors des versions affines fortes).
On dit qu'on va utiliser Thalès après.

II Homographies et birapport

1 Action des homographies sur un espace projectif

Audin : définition des homographies, de PGL, ce sont exactement les applications envoyant un repère projectif sur un autre (l'équivalent de GL pour un espace vectoriel), prolongement des applications affines bijectives en homographies.
H2G2 : cardinal de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$, c'est le nombre de repères projectifs.
Audin : forme rationnelle des homographies de la droite.

2 Birapport sur une droite projective

Audin : il existe une unique homographie fixant l'image de trois points distincts, déf birapport de 4 points, conservation par les homographies (c'est un invariant pour l'action du groupe des homographies sur la droite projective.), la formule moche, en remarque : elle marche aussi avec le point ∞, effet d'une permutation sur le birapport.
Ladegaillerie : le birapport de quatre droites (Thalès).
? : exemple du faisceau de droites qui est une droite projective de $P_2(\mathbb{K})$.

3 Particularités de la droite projective complexe

Audin : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse (une inversion *analytique*), les homographies sont conformes directes (car l'application conjugué et l'inversion sont conformes indirectes), déf division harmonique, cas particulier où un des points est l'infini.
Ladegaillerie : les droites et cercles de $\mathbb{C}$ sont des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
? : dessin de la sphère de Riemann où on dessine des cercles passant ou non par l'infini, puis leur image par projection stéréographique, on explique qu'une droite ou un cercle, c'est la même chose sur la sphère de Riemann.
Audin : quatre points sont sur une droite-cercle ssi leur birapport est réel.
Groupe circulaire, ses éléments sont exactement les applications conservant les "droites-cercles" de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

III Autres applications

1 Extension du birapport aux coniques

Ladegaillerie : rappels sur ce qu'est une conique projective avec l'équation, classification rapide sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en parlant du rang, équation d'une tangente.

Stabilité des coniques par homographie, déf du birapport sur une conique, il est constant donc bien défini, dessin.
Déf homographie de conique, axe d'une homographie, dessin.
Théorème de Pascal, dessin.
En remarque : comparaison avec Pappus où on a aussi des homographies à axe.

2 Applications du birapport en géométrie euclidienne

Audin : le théorème des six birapports, le lemme (en disant que si 5 birapports sont réels, alors le sixième l'est aussi), application au théorème de Miquel, la droite de Simson et le pivot (dessins !!!).

3 Autres occurrences des homographies

FGNal1/FG : automorphismes de $\mathbb{K}(X)$.
H2G2 : les isomorphismes exceptionnels concernant PGL.

140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

À rajouter : lien avec les fonctions méromorphes ?, rajouter des coniques ! ! !, action des homographies, suites récurrentes linéaires (Tauvel), rajouter trous dernière partie

Questions : $\rightarrow$ $\mathbb{K}(X)$ est-il clos ?
Non, on pose $P = T^2 - X$ dans $\mathbb{K}(X)[T]$
$\rightarrow$ $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}(F)[T]$, $P \neq 0$ et $P(X) = 0$.
Si $F = \dfrac{A}{B}$ alors $P(T) = A(T) - F(X)B(T)$ marche.
$\rightarrow$ Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ algébrique sur $\mathbb{K}$, montrer que $F \in \mathbb{K}$.
Par l'exercice précédent, si F n'est pas constant, X est algébrique sur $\mathbb{K}(F)$. Le théorème associé à la formule $[\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}(F)] \times [\mathbb{K}(F) : \mathbb{K}]$ nous donne que X est algébrique sur $\mathbb{K}$, ce qui est légèrement absurde...
$\rightarrow$ Montrer que si F et G sont dans $\mathbb{K}(X)$, $\exists P \in \mathbb{K}[U, V]$ tel que $P(F, G) = 0$ ($P \neq 0$).

Remarques : je pense qu'il est hors sujet de trop parler des fonctions rationnelles ; elles ne doivent être qu'une application des fractions rationnelles. On peut faire un parallèle entre les deux mais c'est tout.
Il faut se préparer un peu à parler de localisation.

Références : Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques spéciales 1*
Tauvel, *Algèbre*
Lelong-Ferrand, Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 1 - Algèbre*
Audin, *Géométrie*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1, analyse 2*

Cadre : $\mathbb{K}$ corps commutatif

I Généralités sur $\mathbb{K}(X)$

1 L'algèbre $\mathbb{K}(X)$

RDO : Définition par localisation. On rappelle les lois qui en font un corps et on précise que c'est même une algèbre. (Changement de corps de base optionnel)
Dans Tauvel : $\mathbb{K}(X)$ n'est pas algébriquement clos.

On peut préciser que si on rajoute un élément algébrique α dans $\mathbb{K}$ (en quotientant par un polynôme irréductible) alors on obtient un corps $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$ isomorphe au corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.
FGNal1 : déf homographie, $\boxed{\text{automorphismes de } \mathbb{K}(X)}$

2 Caractéristiques des éléments de $\mathbb{K}(X)$

RDO : représentants irréductibles, utilisation pour la déf des pôles et racines. Préciser que ça dépend du corps de base comme pour les polynômes. ex : $\frac{1}{X^2+1}$ n'a pas de pôles dans $\mathbb{R}$ et en a dans $\mathbb{C}$.
Définition du degré à partir du représentant irréductible.

3 Dérivation

RDO : la définition de la dérivée, des primitives. Dans un corps de caractéristique 0, les primitives de 0 sont les polynômes constants. Contre exemple sur un corps de caractéristique p : X^p

II Décomposition en éléments simples

On commence par définir les fonctions rationnelles pour les applications de la suite.

1 Fonctions rationnelles

Tauvel : définition du morphisme de substitution/d'évaluation
RDO : problème sur l'ensemble de définition qui peut être vide sur les corps finis (si les pôles sont tous les points de $\mathbb{F}_p$). Si deux fonctions rationnelles coïncident sur une partie infinie alors les fractions rationnelles correspondantes sont égales. Contre exemple avec $X^p - X$ qui n'est pas la fraction rationnelle nulle sur $\mathbb{F}_p$.
Audin : paramétrisation rationnelle des coniques, exemple
Combes : application à l'équation de Diophante

2 Décomposition théorique

LFA : existence et unicité de la décomposition en éléments simples avec déf de la partie entière et des parties polaires. Cela fournit une base.
On en profite pour dire comment obtenir cette décomposition de manière pratique. Exemples nombreux dans RDO.
Tauvel : décomposition dans un corps clos (dans $\mathbb{C}(X)$), dans $\mathbb{R}(X)$. $\frac{P'}{P}$ et Théorème de Lucas.

RDO : application au calcul de dérivées
Tauvel : application au calcul de primitives (p 260 théorie) puis inventer un exemple simple

3 Les résidus

Tauvel : déf des résidus. Calcul des résidus liés à un pôle simple, à n'importe quel pôle si le corps est de caractéristique nulle.
Théorème des résidus

Application : un calcul quelconque (dans Amar Matheron par exemple)
LFA : la primitive d'une fraction rationnelle est rationnelle ssi tous les résidus sont nuls.

III Lien avec les séries formelles

RDO : rappels sur la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[[X]]$ et sur ses inversibles. Définition du développement en série formelle d'une fraction rationnelle, puis le théorème de développement. Exemple avec $\frac{1}{1-X} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$ et $\frac{1}{(1-X)^n}$.

Application : $\boxed{\text{partitions d'un entier en parts fixées}}$
FGNan2 (ou Saux-Picart) : les coefficients du développement en série formelle vérifient une relation de récurrence linéaire.

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow \overline{X}$ est-il toujours générateur du groupe multiplicatif de $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p/(P)$?
Non, $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 - 1)$ a $\overline{X}$ d'ordre 2 et non 8.

$\rightarrow P = X^p - X - a$ avec $a \in K$ corps de caractéristique p. Montrer que P est réductible ssi il est scindé.
L'implication de droite à gauche est clairement évidente. Pour la réciproque, on remarque que si on note α une racine, alors $\forall x \in \mathbb{F}_p$, $P(\alpha + x) = 0$, donc si on arrive à prouver que P a une racine sur K, on les a toutes.
Or si on suppose que P est réductible : $P = P_1 P_2$, alors on connaît les racines de P_1 et P_2. En regardant à quoi ressemble le coefficient de degré $\deg(P_1) - 1$, on trouve que soit la décomposition est triviale, soit que $a \in \mathbb{F}_p$.
Dans tous les cas, c'est prouvé.

Remarques : Le jury demande des exemples sur les corps finis. Il dit aussi : "il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que C ; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps Q des rationnels est un corps algébriquement clos. Il faut connaître le théorème de la base télescopique ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes."
$\rightarrow$ On se donne une chaîne d'extension de corps $K \subset L \subset M$, si $(e_i)_i$ est une base de L sur K et $(f_j)_j$ est une base de M sur L, alors $(e_i f_j)_{i,j}$ est une base de M sur K. En particulier, on a $[M : K] = [M : L][L : K]$.
Au passage, la définition de l'irréductibilité dans le Gozard est suspecte, prendre celle du Perrin.

Références : Perrin, *Cours d'algèbre*
Gozard, *Théorie de Galois*
Calais, *Extensions de corps -Théorie de Galois*
Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1*

I Polynômes irréductibles

On se place sur A un anneau factoriel et on note K son corps des fractions.

1 Définition, premières propriétés

Perrin : déf polynôme irréductible, $A[X]$ est factoriel.
un polynôme irréductible sur $A[X]$ de degré strictement supérieur à 1 n'a pas de racines, contre exemple $(X^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$, mais on a un critère si $\deg(P) \leqslant 3$ sur $K[X]$.

2 Critères d'irréductibilité

Perrin : déf contenu + compatibilité avec la multiplication, polynôme primitif, puis lien entre irréductibilité sur $A[X]$ et sur $K[X]$.
Sans référence : irréductible sur $A[X]$ n'implique pas être irréductible sur $K[X]$: ex $P(X) = 2X$.
Critère d'Eisenstein + remarque avec le contenu, ex de $\sum_{i=0}^{p-1} X^i$
Théorème de réduction, exemple avec $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{F}_p$.
Francinou-Gianella : P est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions de degré inférieur ou égal à $n/2$

II Extensions de corps

1 Corps de rupture, de décomposition

Gozard : déf corps de rupture, existence et unicité à isomorphisme près, construction, exemple de construction de $\mathbb{C}$ + isomorphisme qui permute i et $-i$ pour montrer ce qu'est cet isomorphisme (on fait les gros yeux au jury pour lui montrer qu'on peut parler de cette "théorie des permutations de racines").
Déf corps de décomposition, existence et unicité à isomorphisme près, borne sur le degré de l'extension.
Calais : exemple pour montrer que la borne du degré de l'extension est optimale : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$. Puis exemple de $\mathbb{C}$ où corps de rupture et corps de décomposition coïncident.
Perrin : application à l'existence et l'unicité des corps finis comme corps de décomposition de $X^{p^n} - X$.

2 Éléments et extensions algébriques

Calais : déf élément algébrique, transcendant, exemple de e et π, polynôme minimal et forme de $\mathbb{K}(\alpha)$.
Extension algébrique, une extension de degré fini est algébrique, exemple de $\mathbb{C}$ algébrique sur $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{R}$ pas algébrique sur $\mathbb{Q}$, contre-exemple de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$ (p31).
Gozard : application aux constructions à la règle et au compas : si x est constructible, $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^e$. conséquences sur la quadrature du cercle, la duplication du cube.

3 Clôture algébrique

Calais : déf algébriquement clos, c'est équivalent à dire que tout polynôme est scindé, thm de d'Alembert-Gauss, $\mathbb{R}$ et les corps finis ne sont pas clos.
Déf clôture algébrique, il en existe une. Exemples de $\mathbb{C}$, de $\overline{\mathbb{Q}}$ et de $\bigcup \mathbb{F}_{p^{n!}}$.

III Étude de certaines classes de polynômes irréductibles

1 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$

Gozard : $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p/(\pi)$ avec π irréductible, exemple, il existe des polynômes irréductibles de tout degré, le corps de rupture est aussi un corps de décomposition, factorisation de $X^{p^n} - X$ en irréductibles, exemple de la décomposition de $X^4 - X$, $X^8 - X$, déf du nombre d'irréductibles, la formule, puis application de la formule d'inversion de Möbius.
Francinou-Gianella : Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

2 Polynômes cyclotomiques

Perrin : déf des polynômes cyclotomiques, degré, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$, application au calcul de quelques exemples, forme de Φ_p avec p premier, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ (mais les coefficients ne sont pas toujours -1 ou 1).
Gozard : Φ_{105} et l'homomorphisme canonique permet de trouver $\Phi_{n,K}$, exemples sur $\mathbb{F}_p$.
Perrin : $\boxed{\text{Irréductibilité de } \Phi_n \text{ sur } \mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Q}$, les corollaires.
théorème de la progression arithmétique (admis) et théorème sur l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$, contre exemple de Φ_8.
Mercier : $\boxed{\text{Polygones réguliers constructibles}}$ (en montrant bien tous les corps de rupture et les extensions cyclotomiques.)

142 - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Questions : → Trouver les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ polynomiales en les coefficients des matrices et telle que $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $f(P^{-1}XP) = f(X)$.

On définit les polynômes $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ comme étant les coefficients du polynôme caractéristique, *id est* pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\chi_M(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n} c_i(M) X^{n-i} \quad .$$

Soit F l'ensemble des fonctions $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ polynomiales (en les coefficients), invariantes par conjugaison par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a : $F = \mathbb{C}[c_1, \ldots, c_n]$.

L'inclusion $\mathbb{C}[c_1, \ldots, c_n] \subset F$ est triviale. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $\varphi \in F$, étant polynomiale, on dispose d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que pour toute matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on ait : $\varphi(D) = P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation, on note $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice associée. On a :

$$\begin{aligned} \sigma.P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= P(M_\sigma D M_\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(M_\sigma D M_\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(D) \\ &= P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{aligned}$$

On en déduit donc que P est un polynôme symétrique. Ainsi, c'est un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

Si M est une matrice diagonalisable, par invariance par conjugaison, $\varphi(M)$ est aussi égale à P évalué en les valeur propre de M. L'ensemble des matrices diagonalisables étant dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, φ est égale à P évalué en les valeurs propres des matrices, pour toutes matrices.

Pour conclure, on remarque qu'au signe près les $\mathbb{C}[c_1, \ldots, c_n]$ sont les polynômes symétriques sur les valeurs propres.

Remarques : Il faut mettre des quadriques, les relations coefficients racines et ne pas trop insister sur les polynômes symétriques.

Références : Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques spéciales 1*
Lelong-Ferrand, Arnaudiès, *Cours de mathématiques - tome 1 - Algèbre*
Cox, Little, O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*
Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Mérindol, *Nombres et algèbre*
Szpirglas, *Algèbre L3*

Cadre : A anneau commutatif unitaire, $\mathbb{K}$ corps commutatif.

I Les polynômes à n indéterminées

1 L'algèbre $A[X_1, ..., X_n]$

RDO : déf, les lois, cela forme une A-algèbre commutative. On rajoute le morphisme d'inclusion et l'opération de substitution de polynômes.
Puis base des $\prod X_i^{\alpha_i}$ et enfin l'isomorphisme canonique (utile pour les récurrences des preuves) $A[X_1, ..., X_n] \simeq A[X_1, ..., X_{n-1}][X_n]$.
Pour finir, on parle de la dérivation partielle des polynômes et de l'endomorphisme de dérivation.

2 Différents degrés sur $A[X_1, ..., X_n]$

RDO : déf du degré partiel et du degré total, exemples
Cox Little O'Shea : ordres monomiaux, lex, multidegré, LC, LM, LT

3 Polynômes homogènes

RDO : déf, stabilité par somme et produit, tout élément de $A[X_1, ..., X_n]$ est somme de polynômes homogènes, application : si A est intègre, on a $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
Dérivation des polynômes homogènes et théorème d'Euler.
Leichtnam : $\boxed{\text{Théorème de Molien}}$

4 Propriétés arithmétiques

RDO : théorème de transfert, on rappelle les implications cool : existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, PGCD, PPCM, le théorème de Gauss.
$\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ n'est ni principal, ni euclidien. On présente les divisions euclidiennes partielles, le théorème de substitution, son corollaire et on l'applique au calcul du déterminant de Vandermonde (FGN).
Cox Little O'Shea : Division dans $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ (on divise tant qu'on peut par f_1, puis par f_2,... Une fois cela finit, on déplace le leading term dans le reste et on recommence à diviser ce qui nous reste par les f_i.)
Déf d'une base de Groebner, pourquoi cela compense la division euclidienne, exemple, contre-exemple puis algorithme de Buchberger.

II Fonctions polynômes

1 Définition

RDO : déf de la fonction polynôme, si A est intègre infini, l'application qui à P associe sa fonction polynôme est un isomorphisme. Contre exemple sur un corps fini.

2 Corps finis

ZAV : $\boxed{\text{Chevalley-Warning et Erdös-Ginzburg-Ziv}}$

3 Quadriques

LFA : une forme quadratique est la fonction polynôme d'un polynôme 2-homogène. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification rapide des quadriques en dimensions 2 et 3 par leurs signatures.
Rouvière : applications au calcul différentiel

III Polynômes symétriques et résultant

1 Définitions, premières propriétés

RDO : déf succincte des polynômes symétriques avec l'action de $\mathcal{S}_n$ et des polynômes symétriques élémentaires. Σ_p est p-homogène et de degré partiel 1 par rapport à chacune de ses variables.

2 Applications des polynômes symétriques

RDO : 1) NE PAS OUBLIER : relations coefficients-racines (plus loin dans le RDO), exemple
2) déf du poids et de l'ordre, théorème de structure et algorithme de décomposition, exemples.
3) Formules de Newton, exemples

3 Résultant

Mérindol : déf du résultant sur un corps, $R(P, Q) = 0$ ssi ils ont un facteur commun, formule magique des racines.
Szpirglas : définition de Δ avec le résultant (on fait le contraire du livre), forme avec les racines, c'est un polynôme symétrique en les racines.

- Élimination appliquée à la géométrie

Szpirglas : déf des courbes algébriques, Borne de Bézout.
Puis un peu après, méthode pratique pour trouver les points d'intersection (application de l'élimination).
Sans référence : exemple sur l'intersection de deux coniques : $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ et $y - x^2 = 0$, il y a 3 points d'intersection dont un de multiplicité 2.

143 - Résultant. Applications.

Questions : $\rightarrow$ Trouver un polynôme annulateur de $\dfrac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{2}}$.
Voir méthode dans le plan.

$\rightarrow$ Que se passe-t-il si A et B ne sont pas premiers entre eux dans la borne de Bézout ?
Ils ont une infinité de points d'intersection : ils ont une composante de la courbe en commun.

Remarques : On passe de anneau commutatif à corps algébriquement clos petit à petit. Certains théorèmes peuvent marcher avec des hypothèses plus faibles.

Références : Szpirglas, *Mathématiques L3 - Algèbre*
Mérindol, *Nombres et algèbre*
Saux Picart, *Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux*
Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Audin, *Géométrie*

Cadre : A anneau unitaire commutatif intègre.

I Résultant et racines de polynômes

1 Application de Bézout et résultant

Mérindol : définition de l'application de Bézout, c'est un morphisme de $Fr(A)$-ev et sa matrice est la matrice de Sylvester dans une bonne base. On remarque que elle est dans $\mathcal{M}_{n+m}(A)$. Puis définition du résultant comme déterminant de la matrice de Sylvester.
Sans référence : le résultant est à valeurs dans A. Sur $\mathbb{Z}[X]$, il est donc entier !
Saux Picart : cinq petites propriétés sur le résultant (on adapte l'énoncé à A anneau commutatif). On dit que (d) est la loi de réciprocité. On remplace la (c) et la (e) par la formule du produit du Mérindol.
Puis on donne la méthode de calcul du résultant dans $Fr(A)[X]$ avec l'exemple dans $\mathbb{Z}[X, Y]$.

2 Liens entre résultant et diviseurs communs

Mérindol : $R(P, Q) = 0$ ssi P et Q ont un multiple commun ssi l'application de Bézout n'est pas injective (A intègre), $R(P, Q) = 0$ ssi P et Q ont un facteur commun (A factoriel), contre-exemple juste après si A seulement intègre.
Szpirglas : $R(P, Q) = 0$ ssi P et Q ont une racine commune (K corps algébriquement clos).
Gourdon : application : l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes.

3 Racines multiples et discriminant

Mérindol : formule magique des racines, formule du produit en corollaire.
Szpirglas : remarque : c'est la déf originelle du résultant par Newton.
Corollaire : Théorème de Kronecker
Szpirglas : définition de Δ avec le résultant (on fait le contraire du livre), forme avec les racines, puis corollaire $\Delta = 0$ ssi il y a une racine multiple.
À l'oral : c'est un polynôme symétrique.
En exemple, on calcule le discriminant de $aX^2 + bX + c$ et $X^3 + pX + q$.
En application, Cayley Hamilton.

II Résultant et élimination

1 Élimination

Saux-Picart : On donne juste l'exemple de départ en expliquant que ça consiste à éliminer des variables pour résoudre des systèmes polynomiaux.
? : application à la formule de Héron (voir Ladegaillerie pour la formule) en éliminant dans les équations les coordonnées d'un des points du triangle.

2 Implicitation et théorème d'extension

Mérindol : déf courbe implicite et paramétrée, application : on recopie la méthode pour trouver des équations implicites de courbe paramétrée.
Audin : exemple de la paramétrisation du cercle.
Saux-Picart : Théorème d'extension, à l'oral : on précise que cela ne sert à rien d'éliminer des variables si on ne sait pas remonter ensuite.
? : exemple de la paramétrisation du cercle où on a un point en plus.

3 Intersection de courbes algébriques planes

Szpirglas : déf des courbes algébriques, Borne de Bézout
Puis un peu après, méthode pratique pour trouver les points d'intersection (application de l'élimination).
Sans référence : exemple sur l'intersection de deux coniques : $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ et $y - x^2 = 0$, il y a 3 points d'intersection dont un de multiplicité 2.

III Résultant et arithmétique

1 Nombres algébriques

Szpirglas : α, β algébriques implique $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ algébriques (version nombres algébriques et entiers algébriques)
On précise en corollaire que les entiers algébriques forment un anneau et les nombres algébriques un corps, puis on donne la méthode de construction des polynômes annulateurs, exemple.
Attention prendre la méthode Ulmer : un polynôme annulateur de $\alpha+\beta$ est $\mathrm{Res}_Y(\mathrm{Res}_X(Z-(X+Y), \Pi_\alpha(X)), \Pi_\beta(Y))$ et on remplace par $Z-XY$ pour le produit.

2 Loi de réciprocité quadratique

Mérindol : définition des polynômes K_n, puis $\left(\dfrac{p}{q}\right) = R(K_p, K_q)$.
Loi de réciprocité quadratique.

144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Questions : → Détailler l'isomorphisme liant deux corps de rupture. Où cela sert-il ?
C'est une permutation de racines : juste une action de $\mathcal{S}_n$. C'est important dans les corps finis : on fixe le polynôme avec lequel on quotiente et on fait les calculs avec celui-ci. Si on change de quotientage, tout est faux ! D'autre part, ce principe d'échanger les racines est la base de la fameuse théorie de Galois, où on étudie les automorphismes de corps laissant stables certaines parties pour en déduire des propriétés sur le corps lui-même.

→ On sait que tout polynôme symétrique se décompose en polynômes symétriques élémentaires. Est-ce le cas pour les fractions rationnelles symétriques ?
Oui, on pose $F = \dfrac{P}{Q}$ avec pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma F = F$. On remarque que si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, alors $\dfrac{A+C}{B+D} = \dfrac{B\frac{A}{B} + D\frac{C}{D}}{B+D} = \dfrac{A}{B}$. Ici, on a donc $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma P}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma Q}$. On peut alors décomposer les numérateurs et dénominateurs en polynômes symétriques élémentaires et le tour est joué !

→ Résoudre l'équation du troisième degré (de Cardan).
On commence par la mettre sous la forme $X^3 + pX + q = 0$ par changement de variable, puis on pose $X = u + v$, on simplifie, on pose $3uv + p = 0$ et on aboutit au système suivant (en mettant au cube la première équation) : $\begin{cases} u^3v^3 &= -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{cases}$. On utilise les relations coefficients racines et on trouve ainsi les u et v correspondants.

→ Et le degré 4 ?
dur, aller voir sur wikipedia...

→ Et le degré 5 ? =)
Aha ! On peut dire à haute voix qu'il n'y a pas de formule générale avec des racines en général, et ceci car $\mathcal{S}_5$ n'est pas résoluble !

Remarques : Rapport du jury (pour voir quoi mettre dans cette leçon) : il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, etc.). On pourra parler des applications de la réduction au calcul d'approximations de racines. Notons le lien solide entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les valeurs propres de la matrice compagnon d'un polynôme permet d'entretenir ce lien. Les problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin, sont tout à fait appropriés à ce contexte.
Polynômes symétriques élémentaires et fonctions symétriques élémentaires sont les mêmes objets.
J'ai peut être un peu trop rempli cette leçon... Il y a tant de choses à mettre !

Références : Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, algèbre 1*
Gozard, *Théorie de Galois*
Calais, *Extensions de corps - Théorie de Galois*
Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1 et 2*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*

Serre, *Cours d'arithmétique*
Zavidovique, *Un max de maths*
Mérindol, *Nombres et algèbre*
Szpirglas, *Mathématiques L3 - Algèbre*

I Arithmétique et théorie des corps

1 Généralités sur les racines

RDO : petites définitions et propriétés sur les racines de polynômes (p173), à la fin rajouter le contre exemple de la caractérisation des racines d'ordre k avec les dérivées. Déf polynôme scindé.

2 Corps de rupture, de décomposition

Gozard : déf corps de rupture, existence et unicité à isomorphisme près, construction, exemple de construction de $\mathbb{C}$ + isomorphisme qui permute i et $-i$ pour montrer ce qu'est cet isomorphisme (on fait les gros yeux au jury pour lui montrer qu'on peut parler de cette "théorie des permutations de racines").
Déf corps de décomposition, existence et unicité à isomorphisme près, borne sur le degré de l'extension.
Calais : exemple pour montrer que la borne du degré de l'extension est optimale : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$. Puis exemple de $\mathbb{C}$ où corps de rupture et corps de décomposition coïncident.

3 Éléments et extensions algébriques

Calais : déf élément algébrique, transcendant,polynôme minimal et forme de $\mathbb{K}(\alpha)$.
Extension algébrique, une extension de degré fini est algébrique, exemple de $\mathbb{C}$ algébrique sur $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{R}$ pas algébrique sur $\mathbb{Q}$, contre-exemple de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$ (p31).

4 Clôture algébrique

Calais : déf algébriquement clos, c'est équivalent à dire que tout polynôme est scindé, thm de d'Alembert-Gauss, $\mathbb{R}$ et les corps finis ne sont pas clos.
Déf clôture algébrique, il en existe une. Exemples de $\mathbb{C}$, de $\overline{\mathbb{Q}}$ et de $\bigcup \mathbb{F}_{p^{n!}}$.

II Localisation et dénombrement des racines

1 Localisation des racines

Rombaldi : théorème de Rolle, application aux polynômes scindés sur $\mathbb{R}$
FGNal1 : Gauss-Lucas
FGNal2 : disques de Gershgörin, application à la matrice compagnon pour en déduire une condition de localisation des racines du polynôme compagnon.

2 Dénombrement des racines

Amar-Matheron : théorème de Rouché (appliqué aux polynômes), application
Serre+Zavidovique : Chevalley-Warning+EGZ

III Polynômes symétriques

1 Définitions, premières propriétés

RDO : déf succincte des polynômes symétriques avec l'action de $\mathcal{S}_n$ et des polynômes symétriques élémentaires. Σ_p est p-homogène et de degré partiel 1 par rapport à chacune de ses variables.

2 Applications des polynômes symétriques

RDO : 1) NE PAS OUBLIER : relations coefficients-racines (plus loin dans le RDO), exemple
2) déf du poids et de l'ordre, théorème de structure et algorithme de décomposition, exemples.
3) Formules de Newton, exemples

IV Résultant et racines

1 Premiers résultats

Mérindol : déf du résultant sur un corps, $R(P, Q) = 0$ ssi ils ont un facteur commun.
Szpirglas : $R(P, Q) = 0$ ssi P et Q ont une racine commune (K corps algébriquement clos).

Mérindol : formule magique des racines
Szpirglas : définition de Δ avec le résultant (on fait le contraire du livre), forme avec les racines, puis corollaire $\Delta = 0$ ssi il y a une racine multiple.
En exemple, on calcule le discriminant de $aX^2 + bX + c$ et $X^3 + pX + q$.
En application, Cayley Hamilton.

2 Applications

- Nombres algébriques

Szpirglas : α, β algébriques implique $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ algébriques (version nombres algébriques et entiers algébriques), méthode de construction des polynômes annulateurs, exemple.

- Élimination appliquée à la géométrie

Szpirglas : déf des courbes algébriques, Borne de Bézout
Puis un peu après, méthode pratique pour trouver les points d'intersection (application de l'élimination).
Sans référence : exemple sur l'intersection de deux coniques : $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ et $y - x^2 = 0$, il y a 3 points d'intersection dont un de multiplicité 2.

150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

À rajouter : stabilisateurs pour les actions de translation et d'équivalence (?)

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.
On pourra aussi travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte."

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tomes 1 et 2*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique*
Gourdon, *Algèbre*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*

Plan de la leçon dans le H2G2, p 62.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps.

I Action par translation

H2G2 : déf action par translation à gauche, on cherche à résoudre des systèmes linéaires, donc à trouver un représentant facilement inversible dans chaque orbite.
Matrices échelonnées réduites, le théorème caractérisant les orbites, exemples.
OA/Ciarlet : présentation du pivot de Gauss (à gauche) en définissant les matrices d'opérations élémentaires, complexité.
Dire que c'est pareil pour la translation à droite.
Application : la décomposition LU, le calcul rapide du déterminant, ...
H2G22 : l'action sur les familles libres, Cône nilpotent.

II Action par équivalence

1 Orbites de matrices équivalentes

H2G2 : déf action par équivalence, le rang caractérise les orbites.
? : J_r est un représentant simple de chaque orbite. En particulier, il y a $\min(n, m) + 1$ orbites.
H2G2 : cardinal d'une orbite sur un corps fini, rappel cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, cardinal de l'orbite de J_r (à retrouver, la formule est fausse !).

2 Topologie des orbites

On se place sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
H2G2 : adhérence des orbites, unique orbite fermée/ouverte, cas $m = n$, le rang est semi-continu inférieurement.
Mneimné, Testard : connexité des orbites.

3 Prolongement sur $\mathbb{Z}$

OA (p 285) : décomposition de Smith, le principe rapide.

III Action par conjugaison

H2G2 : déf sur l'action.

1 Action sur les matrices diagonalisables

H2G2 : déf $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, bijection entre le spectre et l'orbite, les polynômes caractéristique et minimal sont des invariants, mais le polynôme minimal n'est pas un invariant total.

2 Action sur les matrices nilpotentes

On se place sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
H2G2 : bloc de Jordan, représentant de chaque orbite, l'invariant total est la taille des blocs de Jordan, dénombrement des orbites nilpotentes.
OA : nilpotente ssi 0 est dans l'adhérence de l'orbite de similitude.
H2G2 : l'orbite nulle est la seule fermée, la seule ouverte est celle du bloc de Jordan de taille maximale.

3 Cas général

On se place sur $\mathbb{C}$.
H2G2/Gourdon : déf matrice compagnon, réduction de Frobenius, les facteurs invariants, la vraie réduction de Jordan, les orbites sont déterminées par les valeurs propres et les blocs de Jordan associés.

4 Réduction des endomorphismes normaux

Gourdon : Théorème de réduction des endomorphismes normaux, application à $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$, O_n.

IV Action par congruence

1 Action sur $\mathcal{S}_n$, théorème de Sylvester

H2G2/Grifone : déf congruence, théorème de Sylvester sur $\mathbb{R}$, signature, classification et dénombrement des orbites, méthode de Gauss (?).
Ladegaillerie : application très rapide à la classification réelle des coniques + dessins.

H2G2/Grifone : classification des orbites sur $\mathbb{C}$ et les corps finis.

2 Stabilisateurs pour l'action de congruence

H2G2 : déf dans le cas réel du groupe orthogonal d'une matrice symétrique comme le stabilisateur de l'action par congruence, déf de $\mathrm{O}(p,q)$, on retrouve le groupe $\mathrm{O}(n)$, on n'étudie que ceux là car les stabilisateurs sont congruents pour deux matrices associées congruentes.
$\boxed{\text{Étude de } \mathrm{O}(p,q)}$.
Dans le cas hermitien, on définit les matrices unitaires.

3 Action sur $\mathcal{A}_n$

H2G2 : déf forme bilinéaire antisymétrique, orbites, déf du groupe symplectique comme stabilisateur des J_{2p}.
? : les systèmes hamiltoniens sont obtenus via des PFD et donnent de bonnes applications des matrices symplectiques.

151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "Dans cette leçon, il est important de bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier, ce qui rend la leçon plus difficile qu'on ne le croit.
Des questions élémentaires comme « un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? » peuvent dérouter un candidat.
Les diverses caractérisations du rang trouvent bien leur place ainsi que, pour les candidats plus chevronnés, l'utilisation du degré d'une extension dans la théorie des corps."
Ce n'est pas une leçon sur les espaces vectoriels de dimension finie, c'est une leçon sur la dimension et c'est tout ! (Du coup, la topologie des evn de dim finie, c'est non !)
On peut largement enlever la dernière partie.

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Cognet, *Algèbre linéaire*
Rouvière, *Petit guide calcul différentiel*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 2*
Calais, *Extensions de corps - Théorie de Galois*
Gozard, *Théorie de Galois*

Cadre : E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ corps.

I Dimension d'un espace vectoriel

1 Familles libres/génératrices/bases

Grifone : déf génératrice, il n'en existe pas tjs (contre-exemples), exemples, déf dimension finie, exemples de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
→ À partir d'ici, E est de dimension finie.
Familles libres, exemples, vision géométrique, sous-famille d'une famille libre.
Base, caractérisation, l'isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$, des exemples de bases, thm de la base incomplète.
En exercice, exemple des suites récurrentes et des EDO linéaires à coefs constants.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Grifone : déf dimension, le cardinal des familles libres/génératrices, application à la dimension d'un produit cartésien.
Revenir sur les exemples précédents.
dimension + base de $\mathcal{M}_{p,n}$, ajouter les autres ev de matrices classiques.

3 Sous-espaces vectoriels et dimension

Grifone : dimension d'un sev, existence et caractérisations du supplémentaire, dessin, formule de Grassman, la somme directe générale + théorèmes.
Un sev d'un ev de dim infinie peut être de dim finie : ex dans $\mathcal{C}^\infty$ en exercice.

4 Applications linéaires

Grifone : compatibilité de l'injectivité et la surjectivité avec les familles libres/génératrices, deux ev de dim finie sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.

II Rang d'une application linéaire

1 Rang : définition et intérêt

Grifone : déf rang, rang d'un projecteur, déf rang d'une matrice, lien avec les applications linéaires.
Théorème du rang, f surjective ssi injective ssi bijective, contre-exemple en dim infinie.

2 Calcul effectif du rang

Grifone : le rang est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de la matrice, appli au rang de la transposée, exemple simple.
L'algorithme de Gauss, c'est un $O(n^3)$, un exemple.

3 Liens avec les actions de groupes

Cognet : le rang est un invariant pour l'action d'équivalence de matrices, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$ (appli du thm du rang), le rang est r ssi on est semblable à J_r, nb de classes d'équivalences.

4 Topologie et rang

Mneimné, Testard : connexité de l'ensemble des matrices de rang donné avec les projecteurs.
FGNal2 : adhérence et intérieur des ensembles de matrices de rang donné.
Rouvière : les matrices de rang donné forment une sous-variété de dimension $n^2 - (n-r)^2$.

III Utilisations en dualité

1 Dualité

Grifone : déf forme linéaire et dual, exemples, $\dim(E) = \dim(E^*)$, base duale, méthode de calcul (faire avec la matrice).
Bidual, isomorphisme canonique entre E et E^{**}.
Base antéduale, méthode de calcul + exemple.
Gourdon : exemple de la transposée.

2 Orthogonalité

Gourdon : déf des orthogonaux, tous les résultats, exemple de la transposée.

IV Dimensions dans d'autres domaines

1 Extensions algébriques de corps

Calais : déf extension de corps, exemples, structure d'ev de dim finie, degré d'une extension, thm de la base télescopique, le degré d'une extension simple est le degré du polynôme minimal, exemples, exemple des extensions cyclotomiques.
Gozard/Calais : application rapide aux problèmes grecs.
Polygones réguliers constructibles.

2 Dimension en théorie des représentations

Leichtnam : le lemme de Molien, Théorème de Molien.
? : un exemple de série de Molien pour $\mathcal{S}_3$.

152 - Déterminant. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \det(M) = \pm 1\}$.
Il suffit d'utiliser la formule d'inversion avec la comatrice.

$\rightarrow$ Montrer que θ est un entier algébrique (sur $\mathbb{Z}$) ssi $\mathbb{Z}[\theta]$ a une famille génératrice finie.
Le sens direct est clair.
Pour l'autre sens, on se donne $(\beta_1, ..., \beta_n)$ une famille génératrice. Alors il existe $A = (a_{i,j})$ une matrice telle que $\theta\beta_i = \sum_j a_{i,j}\beta_j$. On a alors $(A - \theta I_n)\beta = 0$, donc $\chi_A(\theta) = 0$ par Cayley-Hamilton. Comme χ_A est unitaire, il convient.

Remarques : rapport du jury : "Il s'agit encore d'une leçon où les résultats abondent et où le candidat devra faire des choix. On doit pouvoir, dans cette leçon, commencer par définir correctement le déterminant. Beaucoup de candidats entament la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer.
Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée.
L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle.
Le calcul explicite est important, toutefois, le jury ne peut se contenter que d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! De même il est envisageable que des candidats s'intéressent aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.
Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial."

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Merlin, *Méthodix algèbre*
Rouvière, *Petit guide calcul différentiel*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Briane Pagès, *Théorie de l'intégration*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Szpirglas, *Mathématiques L3 - Algèbre*
Mérindol, *Nombres et algèbre*

Cadre : E espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ corps.

I Définition, heuristique et enjeu du déterminant

1 Le déterminant vu comme forme n-linéaire alternée

Gourdon : déf forme alternée, équivalent à antisymétrique, structure des formes n-linéaires alternées, déf déterminant, la formule.
? : exemple du produit scalaire qui est bilinéaire et non-alterné.
Pour le polynôme caractéristique :
Cette formule peut être utilisée pour définir le dét sur un anneau intègre.

2 Déterminant d'un endomorphisme/d'une matrice

Grifone : dét d'une matrice, un petit exemple en dimension 2, déterminant de la transposée, déterminant d'un produit, cas de l'inverse, invariance par changement de base, déf déterminant d'un endomorphisme.
La matrice est inversible ssi le déterminant est non-nul (prouvé plus tard, mais on le met au début car on en a besoin partout).

3 Interprétation géométrique du déterminant

Grifone : c'est le volume d'un parallélépipède, dessin en dim 2.
Gourdon : inégalité d'Hadamard + dessin.
Grifone : déf orientation canonique, dessins.
Gourdon : matrice de Gram et déterminant, lien avec la distance dans un espace vectoriel préhilbertien, application au minimum de l'application $(a_i) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^2 \mathrm{d}x$ (avec le déterminant de Cauchy que l'on verra plus tard).

II Comment calculer un déterminant ?

1 Formes adaptées et pivot de Gauss

Grifone : déterminant d'une matrice triangulaire par blocs/triangulaire, application : le déterminant est le produit des valeurs propres.
Les opérations élémentaires, ce que ça donne sur le déterminant, la méthode de Gauss en précisant rapidement ce qu'on fait quand le pivot est nul, un exemple.
Ciarlet : la complexité en $O(n^3)$.

2 Mineurs et cofacteurs

Gourdon : déf mineurs (principaux), cofacteurs, dvp par rapport aux lignes/colonnes, exemple.
Grifone : déf comatrice, application à la formule de l'inverse, exemple en dim 2.
Gourdon : application à la caractérisation des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

3 Quelques déterminants particuliers

Grifone : règle de Sarrus (expliquée avec toute la non-pédagogie du monde)
Gourdon : déterminant de Vandermonde + la généralisation avec des polynômes étagés, déterminant de Cauchy.
Gourdon/Peyré : le déterminant circulant, l'application avec la matrice des $\cos(j\theta)$, dire que c'est juste une TF discrète (d'où l'apparition miraculeuse des racines de l'unité).
Méthodix : quelques méthodes dont celle p 146, qui utilise la déf du dét sur un anneau.

III Régularité du déterminant et occurrences en analyse

1 Caractère polynomial et applications

Par ♡ (Gourdon/Mneimné, Testard/...) : le déterminant est polynomial donc $\mathcal{C}^\infty$, applications : GL_n est ouvert dans $\mathcal{M}_n$, densité de GL_n dans $\mathcal{M}_n$, connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$.

2 Différentiabilité du déterminant

Rouvière : différentielle du déterminant (se fait avec de la densité), application au wronskien, $\det(\exp) = \exp(\mathrm{Tr})$.
Mneimné, Testard : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété, espace tangent sous forme de l'algèbre de Lie (en utilisant le déterminant de l'exponentielle).

3 Déterminant en théorie de l'intégration

Briane, Pagès : changement de variable, exemple des coordonnées polaires, volume de la boule unité, $\displaystyle\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$.
FGNal3 : $\boxed{\boxed{\text{Ellipsoïde de John-Loewner}}}$, log-concavité du déterminant, dessin.

IV Diverses applications en algèbre et en géométrie

1 Application à la théorie du rang

Grifone : méthodes pour voir si une famille est libre, trouver le rang.

2 Résolution de systèmes linéaires

Grifone : la formule de Cramer, exemple.
Ciarlet : complexité en $O(n!)$ (difficile de faire pire...), on préfère Gauss (et donc LU).

3 Le polynôme caractéristique

→ On utilise ici la déf du dét sur l'anneau des polynômes (Attention!!!).
Grifone : déf polynôme caractéristique, exemple, ses racines sont les valeurs propres, polynôme caractéristique de la matrice compagnon, Cayley-Hamilton, applications à pleins de choses.

4 Résultant

On fait tout sur un corps algébriquement clos!
Mérindol/Szpirglas : déf matrice de Sylvester, déf résultant, il est nul ssi il y a une racine commune.
Déf discriminant, utilisation pour détecter les racines multiples, exemple en degrés 2 et 3.
Application à l'implicitation de courbes paramétrées (exemple du cercle). $\boxed{\boxed{\text{Borne de Bézout}}}$

5 Réciprocité quadratique

Objectif agrégation : $\boxed{\text{Théorème de Frobenius-Zolotarev}}$, application au calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$.
Mérindol : réciprocité quadratique avec le résultant.

153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Questions : → Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, u semi-simple $\Leftrightarrow$ u diagonalisable dans une extension de $\mathbb{K}$. Que se passe-t-il si la caractéristique n'est pas nulle ?
→ $P(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(P(u))$ sur $\mathbb{K}$ non clos ?
Faux, $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
→ semi-simple et pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$ non clos.
même contre exemple.
→ exemple d'endomorphisme simple.
pareil...
→ A-t-on toujours $e^{A+B} = e^A e^B$?
Non, contre exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
→ e^A est un polynôme en A.
e^A est la limite de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ (par division euclidienne) or c'est un sous espace vectoriel de dimension finie donc fermé.
→ Soit E une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, montrer que le groupe de ses inversibles est un ouvert dense.
On considère la suite $M - \frac{1}{k} I_n$, alors le déterminant s'annule un nombre fini de fois sur cette suite car il est polynomial en $\frac{1}{k}$. D'où il existe un rang à partir duquel, la suite n'est constitué que d'inversibles.

Remarques : Il faut insister sur les liens entre $\mathbb{K}[u]$ et les propriétés des endomorphismes. Il faut donc présenter l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ puis continuer la comparaison au fil du plan. En particulier, Dunford se place dans la partie où on considère π_u scindé.
Dans la troisième partie, on trigonalise de plus en plus fortement : on passe de la simple trigonalisation à celle par blocs, puis à Jordan.

Références : Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Merlin, *Méthodix Algèbre*

Cadre : $\mathbb{K}$ corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

I L'algèbre des polynômes d'endomorphisme $\mathbb{K}[u]$

1 Définition

OA : déf du morphisme d'évaluation, de $\mathbb{K}[u]$, c'est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$, déf polynôme minimal π_u.

2 Décomposition de $\mathbb{K}[u]$

OA : On insiste sur $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/ < \pi_u >$, puis lemme chinois et lemme des noyaux et le lien qui les unit. On insiste fortement sur le fait que les propriétés de $\mathbb{K}[u]$ (donc celles de π_u) sont intrinsèquement liées à celles de notre endomorphisme !!!

3 Stabilité

OA : On note $\pi_u = \prod P_i$. On a $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ stable par u. On peut réduire notre étude à ces espaces d'où le nom de réduction.
Si F stable par u, $\mathrm{Ker}(P_i(u_F)) = F \cap \mathrm{Ker}(P_i(u))$. On regarde donc les endomorphismes induits.

4 Polynôme caractéristique et valeurs propres

OA : déf valeur/vecteur propre, polynôme caractéristique, Cayley Hamilton, $\pi_u | \chi_u$, λ vp $\Leftrightarrow$ λ racine de π_u.

II Cas où π_u est à racines simples : diagonalisation

1 Théorème de diagonalisation

OA : déf espace propre, déf diagonalisabilité, cela correspond au fait que π_u est scindé à racines simples, donc $\mathbb{K}[u]$ est un produit de corps.
ex des projecteurs, des symétries qui sont toujours diagonalisables sauf peut être sur un corps de caractéristique 2.
Critère de diagonalisation sur les corps finis.

2 Codiagonalisation

Gourdon : si f et g commutent, les espaces stables de l'un le sont aussi pour l'autre. lien nécessaire et suffisant entre la commutation et la codiagonalisation.

3 Réduction particulière sur un espace vectoriel euclidien

Gourdon : endomorphismes normaux, si F stable par u, alors $F^\perp$ stable par u^*,
$\boxed{\text{Théorème de réduction des matrices normales}}$ sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$ (ça marche moins bien), théorème spectral pour $\mathbb{R}$.

4 Endomorphismes semi-simples

OA : déf semi-simplicité, dire que c'est la généralisation de la diagonalisabilité, voir la différence sur les polynômes (qui ne sont plus scindés), puis ex p324 : u est semi-simple ssi il existe une extension de $\mathbb{K}$ dans laquelle u est diagonalisable.
Dunford "généralisé" : dire que c'est sur $\mathbb{R}$ et que l'on a besoin du Dunford moins puissant vu après.

III Cas où π_u est scindé : différentes trigonalisations

1 Critère de trigonalisation

Gourdon : déf sous espaces caractéristiques, forme du polynôme minimal, CNS de trigonalisation.
Florian Lemonnier : "Sur un corps algébriquement clos, tout le monde il est trigonalisable (youpi !)"
application aux matrices nilpotentes (on insiste dessus). Trigonalisation simultanée.

2 Décomposition de Dunford

Gourdon : $\boxed{\text{la décomposition de Dunford}}$, la méthode magique + exemple
Application : trigonalisation forte (en faisant des blocs de matrices triangulaires)

3 Réduction dans le cas général

Gourdon : décomposition de Frobenius (préciser qu'on ne demande plus rien sur π_u), f et g sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude, application à la décomposition de Jordan (la réduction la plus forte en supposant π_u scindé)

IV Applications

1 Calculs de puissances, d'inverses, d'exponentielles de matrices

Méthodix : Calcul d'inverses et de puissances
Calcul d'exponentielles matricielles avec Dunford, on en déduit la décomposition de Dunford de l'exponentielle, corollaire : $\exp(A)$ diagonalisable ssi A l'est.

2 Topologie matricielle

OA : densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Application : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
Gourdon : application : différentielle du déterminant.
OA : densité de $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, puis cas réel : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ fermé différent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cas complexe : $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Application : $\phi : D + N \mapsto D$ n'est pas continue, Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$.
Zavidovique : $\boxed{\text{Image de l'exponentielle}}$.

3 Équations différentielles

Gourdon analyse : résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
Rouvière : $\boxed{\text{Théorème de Liapounov}}$ sur la stabilité de systèmes différentiels réguliers grâce au linéarisé.

154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Questions : → Si F est stable par u, est-il stable par $\exp(u)$?
Oui car l'exponentielle est un polynôme en u.

→ Un sous espace stable a-t-il un supplémentaire stable ?
Non évidemment, penser à un bloc de Jordan 2×2.

→ Trouver un exemple où $\pi_{u_{|F}}$ est scindé à racines simples et où π_u ne l'est pas.
Encore un bloc de Jordan 2×2... (contre-exemple universel)

Remarques : rapport du jury : "Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues, par exemple le cas d'une matrice diagonalisable, le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.
La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté à l'intitulé la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations."

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Merlin, *Méthodix algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1,2 et 3*
Mansuy, Mneimné, *Algèbre linéaire*
Madère, *Leçons d'algèbre*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tomes 1 et 2*
Ulmer, *Théorie des groupes*

Cadre : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F sev stable par u endomorphisme (préciser que on cherche des sev stables, pas des parties quelconques).

I Sous-espaces stables par un endomorphisme

1 Notion de sous-espace stable, bases adaptées

Objectif agrégation : déf sev stable, ex de l'image et du noyau.
FGNal1 : si u stabilise tous les sev de dim k, alors c'est une homothétie.
FGNal2 : sous-espaces stables d'une matrice nilpotente.
Mansuy : l'exemple $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)I_n$.
OA : la déf de $u_{|F}$ et $\overline{u}$, la forme matricielle liée à un espace stable.
? : réduire un endomorphisme, c'est trouver une base adaptée aux espaces stables.
Exemples : une symétrie et un projecteur dans une base nulle, leurs matrices réduites avec les espaces stables, pour le projecteur on a une décomposition $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ en espaces stables.
H2G22 : $\boxed{\text{Cône nilpotent}}$

2 Sous-espaces stables et dualité

Gourdon : déf orthogonal, déf transposée (avec $F = E$), sa matrice, F stable par u ssi $F^{\perp}$ stable par ${}^{t}u$, les hyperplans stables sont les droites stables de la transposée (c'est donc plus facile à trouver).
Madère : exemple (p 225).

II Application à la réduction d'endomorphismes

1 Sous-espaces propres et caractéristiques

Gourdon : déf valeur propre, le polynôme caractéristique permet de les trouver, déf espaces propre et caractéristique, un exemple.
OA : la formule liant $\chi_{u_{|F}}$ et χ_u, χ_u irréductible ssi pas de sev stable non trivial.

2 Lemme des noyaux et conséquences

Grifone : le lemme des noyaux, interprétation comme la diagonalisation par blocs, u est diagonalisable ssi annulé par un polynôme scindé à racines simples.
Trigonalisable par blocs ssi annulé par un polynôme scindé (par exemple si le corps est algébriquement clos).
OA : déf endomorphisme semi-simple, la caractérisation, contre-exemple des nilpotents.

3 Réduction de Frobenius

H2G2/Gourdon (dans les compléments) : déf endomorphisme cyclique, les conditions équivalentes + rappel de la déf de matrice compagnon, théorème de décomposition de Frobenius et sa version matricielle, les facteurs invariants déterminent la classe de conjugaison.
Un contre exemple sur le diagramme de Young à suivre où on a même polynômes caractéristique et minimal mais les invariants diffèrent, théorème de Jordan pour les nilpotentes, vrai théorème de Jordan, un petit exemple.

III Sous-espaces stables et commutation

1 Réduction simultanée

Gourdon : comportement des espaces propres par rapport à la commutation, diagonalisation/trigonalisation simultanée.
OA : contre-exemple si aucun des endomorphismes est diagonalisable/trigonalisable, GL_n et GL_m sont isomorphes ssi $n = m$.

2 Décomposition de Dunford

Gourdon : $\boxed{\text{Théorème de Dunford}}$ (en application de la codiagonalisation et du lemme des noyaux).
Merlin : décomposition de Dunford de exp.
FGNal2 : application à l'image réciproque de I_n par l'exponentielle.

3 Endomorphismes normaux

Gourdon : déf endomorphisme normal, le lemme de stabilité de l'orthogonal (amélioré).

$\boxed{\text{Théorème de réduction des endomorphismes normaux}}$.

Application à la réduction des matrices antisymétriques et des isométries, théorème spectral.
FGNal3 : l'exponentielle est surjective de $\mathcal{A}_n$ vers SO_n.

IV Décomposition des représentations linéaires des groupes finis.

Ulmer : déf représentation, un exemple, sous-représentation, déf irréductible, théorème de Maschke, cas des groupes abéliens.
Peyré : représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Remarques : rapport du jury : "Il faut ici pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité.
On peut coir que le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.
On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques. Mentionnons que l'affirmation «l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$» nécessite quelques précisions sur le corps $\mathbb{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.
Le lien peut aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide."

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
Merlin, *Méthodix algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1,2 et 3*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Ulmer, *Théorie des groupes*

Cadre : E espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

I La boîte à outils du diagonaliseur

1 Diagonalisabilité et espaces propres

Gourdon : déf valeur propre, déf espaces propre, un exemple, les sous-espaces propres sont en somme directe.
? : les espaces propres sont les plus grands sous-espaces où u est une homothétie (c'est cool !).
Grifone : déf diagonalisable, c'est équivalent à ce que $E = \oplus E_\lambda$, si toutes les vp sont distinctes et si il y en a n, on est diagonalisable.

2 Polynômes annulateurs

OA : déf du morphisme d'évaluation, de $\mathbb{K}[u]$, c'est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$, déf polynôme minimal π_u. On insiste sur $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/ < \pi_u >$, puis lemme chinois et lemme des noyaux et le lien qui les unit.

Déf polynôme caractéristique, Cayley Hamilton (donc $\pi_u|\chi_u$), on réapplique le lemme des noyaux en définissant les sous-espaces caractéristiques, λ vp $\Leftrightarrow$ λ racine de π_u (ou χ_u).

$\rightarrow$ rajouter exemples...

II Critères de diagonalisabilité

1 Utilisation des polynômes

Grifone : le théorème et l'exemple à suivre.
Plus loin, le théorème des polynômes annulateurs et le corollaire avec le polynôme minimal, exemples.
Gourdon (ex 4.2) : CNS de diagonalisabilité sur les corps finis.
FGNal2 : théorème de Burnside.

? : ex d'une rotation diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
OA : déf semi-simplicité, dire que c'est la généralisation de la diagonalisabilité, puis ex p324 : u est semi-simple ssi il existe une extension de $\mathbb{K}$ dans laquelle u est diagonalisable, contre-exemple des nilpotents.

2 Liens entre quelques diagonalisations par blocs et la diagonalisation

Gourdon : Théorème de réduction des endomorphismes normaux, application au théorème spectral, cas où les matrices antisymétrique et orthogonales sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, elles sont tjs diagonalisables dans $\mathbb{C}$ (car on sait diagonaliser chaque bloc), la forme de la matrice diagonale associée.

OA/ ? : déf matrice compagnon, les polynômes minimal et caractéristique sont égaux, CNS de diagonalisation des matrices compagnons (χ_u scindé), la diagonalisation par blocs de Frobenius donne une diagonalisation ssi le dernier facteur invariant est scindé à racines simples.

OA : Jordan devient diagonalisable ssi toutes les vp sont de multiplicité maximale.

3 Diagonalisation simultanée

Gourdon : comportement des espaces propres par rapport à la commutation, diagonalisation simultanée, en remarque : ça marche aussi pour une famille finie d'endomorphismes commutant deux à deux.
OA : contre-exemple si aucun des endomorphismes est diagonalisable, application : GL_n et GL_m sont isomorphes ssi $n = m$, les sous-groupes finis de GL_n sont conjugués à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

III Décompositions matricielles liées

1 Décomposition de Dunford

Gourdon : Décomposition de Dunford (en application de la codiagonalisation), méthode pratique avec un exemple du Grifone.

Merlin : décomposition de Dunford de exp.
FGNal2 : application à l'image réciproque de I_n par l'exponentielle.
OA : $\exp(A)$ est diagonalisable ssi A l'est.
Gourdon : application au calcul facile d'exponentielle avec les projecteurs spectraux.

2 Décomposition polaire

En application du thm spectral :
H2G2 : la décomposition polaire, c'est un produit de 2 matrices diagonalisables donc c'est cool.
Une application à l'oral.

IV Occurrences dans d'autres domaines

1 Topologie avec les matrices diagonalisables

OA : les résultats de densité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, application à la non-continuité de Dunford.
Le déterminant de l'exponentielle est l'exponentielle de la trace.

2 Dénombrement des matrices diagonalisables sur un corps fini

FGNal1/H2G2 : cardinal des orbites, nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.

3 Résolution de suites récurrentes linéaires

Grifone : méthode pour calculer la puissance d'une matrice diagonalisable, l'exemple pour les suites récurrentes en application.

4 Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Grifone : l'exemple.

5 Occurrences en théorie des représentations

Ulmer : déf représentation, un exemple, sous-représentation, pour tout g, $\rho(g)$ est diagonalisable, a-t-on codiagonalisabilité ?
Déf irréductible, toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 (on est codiagonalisable) ssi le groupe est abélien.
Peyré : représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

156 - Exponentielle de matrices. Applications.

Remarques : rapport du jury : "C'est une leçon difficile et il faut noter que ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.
Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Pour les candidats plus aguerris, les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire y sont tout à fait à propos. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire.
L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.
Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement.
Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité sur la question."

Références :
Lafontaine, *Introduction aux variétés différentelles*
Gourdon, *Algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Zavidovique, *Un max de maths*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 2 et 3*
Merlin, *Méthodix algèbre*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*

Cadre : on se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Exponentielle de matrice

1 La série exponentielle

Lafontaine : série normalement convergente, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si A et B commutent.
? : contre exemple avec $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en remarque : Baker-Campbell-Hausdorff.
Exponentielle de la transposée et du conjugué.
Gourdon : $\exp(A)$ est inversible et on connaît son inverse.

2 Lien avec les polynômes d'endomorphismes

OA : déf du morphisme d'évaluation, de $\mathbb{K}[u]$, c'est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$, déf polynôme minimal π_u.
Mneimné, Testard : application : $\exp(A)$ est un polynôme en A, il n'existe pas de polynôme indépendant de A.
Zavidovique : corollaire : $\exp(A)$ commute avec tout polynôme en A.

3 Méthodes de calcul

• Se ramener à une forme simple.
Lafontaine : effet du changement de base sur l'exponentielle.
? : exponentielle d'une matrice diagonale.
Grifone : exp d'une diagonale par blocs, appli à Jordan.
? : exp d'un bloc de Jordan et de $\exp(tJ_\lambda)$.
Gourdon : réduction des matrices de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec l'exponentielle des blocs.
FGNal3 : application : l'exponentielle est surjective de $\mathcal{A}_n$ vers SO_n.

• Utiliser la décomposition de Dunford.
Merlin : décomposition de Dunford de exp.
Gourdon : application au calcul facile d'exponentielle avec les projecteurs spectraux.
FGNal2 : application à l'image réciproque de I_n par l'exponentielle.
OA : $\exp(A)$ est diagonalisable ssi A l'est.

II Exponentielle et topologie

1 Continuité de l'exponentielle

Lafontaine : continuité de exp, déterminant de l'exponentielle.
Mneimné, Testard : exp réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.
H2G2 : Étude de $\mathrm{O}(p,q)$, le corollaire (sans parler de SO_0).

2 Différentiabilité de l'exponentielle

Lafontaine : elle est $\mathbb{C}^\infty$ en fait.
Rouvière : différentielle de l'exponentielle.
Lafontaine : théorème d'inversion locale appliqué à l'exponentielle, tout morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de la forme $t \mapsto \exp(tA)$.
Mneimné, Testard : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.
Zavidovique : Image de l'exponentielle.

III Applications en calcul différentiel

1 Étude d'équations différentielles

Demailly : solution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, exemple.
Rouvière : théorème de Lyapounov.
? : application au pendule (équation dans Rouvière).

2 Exponentielle et sous-variétés

Lafontaine : déf rapide sous-variétés par carte locale.
Gonnord-Tosel : $\exp(A+B) = \lim_k (\exp(A/k)\exp(B/k))^k$ (formule de Trotter-Kato).

$\boxed{\text{Théorème de Cartan-Von Neumann}}$.
Mneimné, Testard : l'espace tangent dans ce cas, application aux groupes classiques, donner leurs espaces tangents.
? : $\mathrm{O}(p,q)$ est une sous-variété.

157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Remarques : rapport du jury : "Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).
Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables, mais une grande proportion de candidats pensent à tort que la réciproque est vraie.
Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement."
Je voulais mettre des décompositions matricielles type LU ou QR, mais c'est hors-sujet : on parle de trigonalisation, pas de matrices triangulaires ! De plus, on s'intéresse à certaines classes d'orbites pour l'action de conjugaison, pas à des décompositions LU qui n'ont rien à voir avec cette action.

Références : Lafontaine, *Introduction aux variétés différentelles*
Gourdon, *Algèbre*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 2 et 3*
Merlin, *Méthodix algèbre*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - tomes 1 et 2*

Cadre : E espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

I Endomorphismes trigonalisables

1 Boîte à outils du trigonaliseur

OA : déf rapide du polynôme minimal π_u, déf polynôme caractéristique, Cayley Hamilton (donc $\pi_u|\chi_u$), on réapplique le lemme des noyaux en définissant les sous-espaces caractéristiques.
? : un exemple avec une matrice triangulaire.

2 Critères de trigonalisabilité

Gourdon : déf trigonalisable pour une matrice, lien endomorphisme/matrice.
OA : les caractérisations par les polynômes minimaux et caractéristiques, si $\mathbb{K}$ est clos, c'est facile.
? : ex de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la restriction à un sev est trigonalisable.
Grifone : formule du det et de la trace avec les valeurs propres.

3 Trigonalisation simultanée

Gourdon : comportement des espaces propres par rapport à la commutation, trigonalisation simultanée.
? : contre-exemple : $(J_1, 1)$ et $(1, J_1)$.
OA : contre-exemple si aucun des endomorphismes est trigonalisable, la somme et la composée sont trigonalisables si il y a commutation, l'exercice 4.13 (qui marche en remplaçant tout par trigonalisable).

II Endomorphismes nilpotents

1 Étude de $\mathcal{N}$

OA : déf nilpotent, exemple du bloc de Jordan nilpotent, déf $\mathcal{N}$, c'est un cône, ce n'est ni un idéal, ni un espace vectoriel, en dim 2 on peut l'expliciter + dessin, commutativité + contre-exemple, $\text{Vect}(\mathcal{N}) = \text{Tr}^{-1}(0)$, donner la base de $\text{Vect}(\mathcal{N})$.
Plus loin, l'homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents.

2 Caractérisations de la nilpotence

OA : les caractérisations de la nilpotence + contre-exemples.
? : diagonalisable + nilpotent implique nul.
FGNal3 : théorème de Burnside.

3 Les blocs de Jordan

H2G2/Gourdon (dans les compléments) : théorème de Jordan pour les nilpotentes, vrai théorème de Jordan, un petit exemple.

III Utiliser les matrices triangulaires et nilpotentes

1 La décomposition de Dunford

Gourdon : Décomposition de Dunford, méthode pratique avec un exemple du Grifone.
Merlin : décomposition de Dunford de exp.
Gourdon : application au calcul facile d'exponentielle avec les projecteurs spectraux.
FGNal2 : application à l'image réciproque de I_n par l'exponentielle.

2 Méthodes de calcul de puissances et d'exponentielles, applications

Merlin/Grifone : calcul de la puissance d'une matrice en adaptant aux blocs de Jordan, résolution d'un système de suites récurrentes.

"Grifone" : exponentielle d'un bloc de Jordan (de tête), méthode de calcul d'exponentielle avec Jordan.
Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

3 Dénombrement

H2G2 : les diagrammes de Young, leur nombre est le nombre d'orbites nilpotentes, c'est le nombre de partitions de n.
H2G22 : Cône nilpotent.

4 Topologie

OA : toutes les propriétés pour les matrices trigonalisables, non-continuité de Dunford.
Lafontaine : $\det(\exp) = \exp(\mathrm{Tr})$.
OA : nilpotente ssi 0 est dans l'adhérence de l'orbite de similitude.
H2G2 : l'orbite nulle est la seule fermée, la seule ouverte est celle du bloc de Jordan de taille maximale.

158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Remarques : rapport du jury : "C'est une leçon transversale. La notion de signature doit bien sûr figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. L'action du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon.
Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence.
L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.
On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent."
Les théorèmes spectral et de Sylvester donnent le même résultat. Il est néanmoins nécessaire de bien faire la différence entre les deux cadres de ces théorèmes. Ce sont deux réductions pour des actions différentes !

Références : Gourdon, *Algèbre*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Endomorphismes autoadjoints et réduction

1 Matrices symétriques/hermitiennes et endomorphismes autoadjoints

Grifone/Gourdon : déf matrices symétriques/hermitiennes, dimension des sev associés, ils sont supplémentaires, $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
On se place sur un espace euclidien de même dimension, déf de l'adjoint, sa matrice dans une base orthonormée.
? : on définit $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ avec les valeurs propres (pareil pour $\mathcal{H}_n$ en disant que les vp sont réelles).

2 Réduction des endomorphismes autoadjoints

? : on rappelle qu'on veut une réduction pour l'action de conjugaison.
Grifone : les théorèmes spectraux dans les cas réel et complexe, exemple.
? : application au valeurs propres de ${}^tMM$ si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, elles sont strictement positives, existence d'une racine carrée.

3 Décomposition polaire

H2G2 : décomposition polaire, formule de la norme 2, maximalité du groupe orthogonal.
Application de l'exponentielle pour obtenir les homéomorphismes entre $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ (pareil avec $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$), puis application aux homéomorphismes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

II Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par congruence et formes quadratiques

1 Formes quadratiques et loi d'inertie de Sylvester

? : on rappelle qu'on veut une réduction pour l'action de congruence.
Grifone : déf forme quadratique sous la forme ${}^tXMX$, effet du changement de base, déf base orthogonale/orthonormée, théorème d'existence d'une base orthogonale, théorème de Sylvester ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$), déf de la signature.
Méthode de Gauss sur un exemple (cas sans carré).
Nouvelle déf de la (définie) positivité, comment le voit-on sur la signature, non-dégénérescence avec la signature.

2 Orbites et stabilisateurs de cette action

H2G2 : le rang caractérise les orbites sur $\mathbb{C}$, il faut rajouter la signature sur $\mathbb{R}$, l'orbite de I_n est la signature.
Déf de $\mathrm{O}(q)$, on retrouve les groupes $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$. On peut s'intéresser à $\mathcal{O}(sign(q))$ au lieu de $\mathcal{O}(q)$ car ils sont congruents.
Étude de $\mathrm{O}(p,q)$, le corollaire (sans SO_0).

3 Pseudo-réduction simultanée

Gourdon/Grifone : théorème de réduction simultanée.
FGNal3 : convexité logarithmique du déterminant, Ellipsoïde de John Loewner, inégalité de Minkowski.

III Quelques applications

1 Classification euclidienne des coniques et quadriques

Grifone (dans les annexes)/Ladegaillerie : déf d'une conique/quadrique, faire un tableau rang/signature/cône isotrope/k>0/k<0 avec les noms des coniques/quadriques correspondantes, puis dessins en annexe.
C'est une application de Sylvester mais on utilise plutôt la pseudo-réduction simultanée pour ne pas dilater la conique/quadrique (on garde donc les coefficients).

2 Étude d'extrema

Gourdon : déf Hessienne, c'est une forme quadratique, thm de lien entre extremum et (défini) positivité/négativité, cas de la dimension 2.

Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$ (en insistant sur le lien entre cône isotrope et les intersections de f avec son plan tangent ! ! ! + dessins)

Hirriart-Urruty : le cas où on veut minimiser la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$, le lemme de Kantorovitch, le GPO.

159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance.
Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon.
L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable."

Références : Cognet, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Grifone, *Algèbre linéaire*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 1*
Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, *Algorithmique*

Commencer à l'oral par répéter un peu le début du chapitre concerné dans le Cognet.
Cadre : E espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ corps.

I Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

1 Formes linéaires, exemples

Cognet : déf forme linéaire, exemples de la trace, les applications coordonnées, les intégrales sur des ev de dim finie.
A l'oral : en dimension infinie, on a les mesures, les distributions...
? : exemple de la différentielle.
OA : thm de Riesz, application au gradient.

2 Noyaux et hyperplans

Grifone : rang d'une forme linéaire, dimension noyau.
Gourdon : déf hyperplan, le lien entre noyau et hyperplan.
Cognet : le noyau détermine la forme linéaire à constante près.
Brézis : Hahn-Banach géométrique.
? : Méthode de Kacmarz

II Espace dual

1 Espaces et bases duaux

Cognet : déf espace dual, déf base duale, $\dim(E) = \dim(E^*)$.
Grifone : on a donc isomorphisme entre un espace et son dual mais il n'est pas canonique, méthode de calcul des bases duales.
Gourdon : la formule $\varphi = \sum \varphi(e_i)e_i^*$.
Cognet : déf bidual, l'isomorphisme canonique.

Critère de liberté des familles libres du dual, les deux applications.
La proposition caractérisant les bases duales, les exemples.
FGNal1 : isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual, corollaires.

2 Bases antéduales

Cognet : déf, thm d'existence/unicité.
Gourdon : méthode de calcul.
Cognet : exemple pour retrouver les polynômes interpolateurs de Lagrange.

3 Application de la dualité

OA : Théorème des extréma liés avec sa version comme intersection de noyaux de différentielles.
Cognet : remarque 2.3.4 : on étend le petit résultat du début sur les hyperplans : la forme linéaire φ est dans l'espace vectoriel engendré par la famille φ_i si et seulement l'intersection des hyperplans associés aux φ_i est dans l'hyperplan associé à φ.
OA : application : théorème spectral.

Cognet : application à l'approximation de Simpson.
La formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$.

Cormen : Transformée de Fourier rapide.

III Orthogonal et polaire d'une partie

Gourdon : tout le passage à ce sujet.
Grifone : un calcul d'un orthogonal.
Brézis : application au critère de densité dans les Banach (application de Hahn-Banach).

IV L'application transposée

Gognet/Gourdon : tous les résultats sur la transposée.

160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

À rajouter : Décomposition QR avec Gram Schmidt, similitudes

Questions : → Quelles sont les classes de conjugaisons de $SO_3(\mathbb{R})$?
On pose $\sim$ la relation antipodale. Alors $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \{(u,\theta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\}/\sim$. En effet, la conjugaison conserve l'angle de la rotation mais modifie la droite stable.

→ Peut-on centrer l'ellipsoïde de John-Loewner autre part qu'en 0 ?
voir DVP concerné.

Remarques : le mot important de la leçon est euclidien. Cela implique de ne présenter que des réductions dans $\mathbb{R}$. De plus, il faut aussi penser à utiliser le produit scalaire ! Les matrices inversibles, la décomposition de Dunford, Jordan, ou toutes les choses qui n'utilisent pas explicitement le produit scalaire, sont à oublier...
Le fil rouge de cette leçon réside dans le théorème de réduction des matrices normales, qui se prouve avec le tout petit lemme : "si F est un sev stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*" ; en conséquence, il faut insister sur ce résultat !

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Gourdon, *Algèbre*
Audin, *Géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Tauvel, *Algèbre*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*

Cadre : E espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Le produit scalaire est noté $(.,.)$.

I Adjoint d'un endomorphisme

1 Définition de l'adjoint

Tout est présent dans le Grifone : il faut donner la définition et les propriétés citées au dessous.
On peut trouver un exemple intéressant dans le morphisme de conjugaison de matrices (Gourdon). Dans les propositions simples sur l'adjoint, il faut rajouter les égalités sur $Ker(f)^{\perp}$ et $Im(f)^{\perp}$ (Grifone).

2 Adjoints remarquables

On définit les endomorphismes/matrices normaux/normales et on met en exemple les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux. On précise la propriété de groupe/espace vectoriel/variété différentielle des ensembles associés(en précisant la loi de groupe !), sauf pour les endomorphismes normaux où on donne le contre exemple suivant :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = O + S$ n'est pas normale.
Cette partie sert à tout bien définir pour les théorèmes suivants utilisant les matrices symétriques ou orthogonales.
Les définitions sont trouvables partout (Grifone, Gourdon), par contre il est conseillé de prendre la définition de $\mathrm{O}(E)$ donnée par $f^* \circ f = f \circ f^* = id$. Elle est plus naturelle avec celle donnée pour les matrices.

II Endomorphismes normaux et réduction

1 Premières propriétés

Propriétés présentes dans Grifone .
Ne pas oublier de dire que si F est un sev stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f^*. C'est un des ingrédients principaux des théorèmes de réduction.

2 Réduction

On cite le Théorème de réduction des endomorphismes normaux (Gourdon). En application, on l'applique aux matrices antisymétriques (encore Gourdon) et on peut citer la remarque sur la non-inversibilité de ces matrices en corollaire.
Attention on utilise qu'une matrice de passage d'une bon vers une bon est orthogonale dans le théorème de réduction ! Il s'agit au moins de préciser que ce point sera détaillé plus tard, dans la partie sur les endomorphismes orthogonaux.

III Endomorphismes orthogonaux

1 Quelques propriétés

On recopie toutes les propriétés du Grifone sur les définitions équivalentes, la matrice de passage d'une bon vers une bon est orthogonale, et le spectre et le déterminant des endomorphismes orthogonaux. On fera bien attention à parler d'isométries !
Ensuite on définit SO, on dit bien que c'est un groupe et on cite le théorème de réduction (Gourdon).

2 Applications en dimension 2 et 3

On recopie les pages 241-243 du Grifone en donnant l'exemple de la page 245. Penser à faire les dessins en annexe !

3 Propriétés algébriques et topologiques

On utilise le Audin et H2G2 pour les propriétés de base de O_n et SO_n : compacité, connexité et qui engendre ces groupes. On peut parler de la maximalité de O_n en tant que sous-groupe compact de GL_n. On applique à la simplicité de SO_3.
Pour se rappeler ce qu'est une réflexion et un retournement, on peut regarder le Tauvel.
FGNal3 : tout sous groupe compact et maximal de GL_n est conjugué à O_n. Et l'exponentielle des matrices antisymétriques est surjective.

IV Endomorphisme autoadjoints.

1 Propriétés et théorème réduction.

Première propriété : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sans référence...)
Le théorème spectral (thm de réduction) se retrouve dans le Grifone ou le Gourdon. Pour l'appliquer, on commence par définir les matrices $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ puis on met la proposition du Gourdon sur les matrices de produits scalaire et les formes quadratiques avec l'exemple de la page 255.
En application, l'ellipsoïde de John-Loewner (FGNal3).

2 Décomposition polaire.

On commence par le théorème de codiagonalisation en lemme, ainsi que l'existence et unicité de la racine carré (Gourdon). Le théorème de décomposition polaire est dans le Mneimé Testard. On peut l'appliquer à la détermination de points extrémaux de la boule unité dans $\mathcal{L}(E)$ qui est dans le FGNal3.

3 Autres applications.

On pourra parler de l'exponentielle de matrice symétrique (qui réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}^{++}$, cf Mneimé Testard, et qui a un lien avec les algèbres/groupes de Lie), ainsi que du théorème de Courant-Fisher (FGNal3).

161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Questions : $\rightarrow$ Montrer qu'une isométrie est une application affine.
On se donne un point O, alors $\forall M, N$, $\left\|\overrightarrow{f(M)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\right\|^2$. Donc en développant, on trouve $\overrightarrow{f(M)f(O)}.\overrightarrow{f(O)f(N)} = \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{ON}$.
On pose l qui à un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ associe $\overrightarrow{f(O)f(M)}$, alors l conserve le produit scalaire par ce qui a été fait avant. On veut montrer que l est linéaire.
On a $\|l(\vec{u} + \lambda\vec{v}) - l(\vec{u}) - \lambda l(\vec{v})\| = \|\vec{u} + \lambda\vec{v} - \vec{u} - \lambda\vec{v}\| = 0$ en développant en normes et produits scalaires l'expression de départ. On en déduit que l est linéaire et on a bien une application affine.

$\rightarrow$ Montrer qu'une isométrie est bijective.
Dans la question précédente, on a montré au passage que la partie linéaire était un endomorphisme orthogonal. On a $f(M) = f(O) + l(\overrightarrow{OM})$. On voit vite que $g(M) = O + l^{-1}(\overrightarrow{f(O)M})$ est l'inverse de f.

Remarques : Il est dit dans le rapport du jury que l'on peut mettre dans cette leçon des éléments sur les objets stables par isométries... Les groupes paveurs vont parfaitement bien dans cette leçon !
Le Mercier suit une fois encore assez bien cette leçon de géométrie !
C'est génial comme leçon ! BWA !

Références : Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Berger, *Géométrie 1*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*

Cadre : $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension n, E espace vectoriel associé. (E est euclidien du coup)

I Généralités

1 Définitions, premiers exemples et propriétés

Mercier : définition d'une isométrie (rajouter les normes), caractérisation.
Audin : exemple des translations, symétries, réflexions.

2 Propriétés et structure des isométries

Mercier : Une isométrie est bijective, $Is(\mathcal{E}) < \mathrm{GA}(\mathcal{E})$, l'application $f \mapsto \vec{f}$ est un isomorphisme de groupes et $\vec{f} \in \mathrm{O}(E)$, puis définition de Is^+ et Is^-.
La décomposition canonique en translation et isométrie avec la définition de l'espace des vecteurs invariants par $\vec{f}$, si l'espace invariant de $\vec{f}$ est réduit à $\vec{0}$ alors f admet un unique point invariant.
Une isométrie est déterminée par $n+1$ points.

II Classification des isométries

1 Étude de $\mathrm{O}(E)$

Intérêt : $Is(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \rtimes \mathrm{O}(E)$ et $Is^+(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \rtimes \mathrm{SO}(E)$
Audin : théorème de réduction
H2G2 : générateurs de $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ avec déf retournement.
Mercier : Cartan-Dieudonné : toute isométrie est le produit d'au plus $n+1$ réflexions, et tout déplacement le produit de $n+1$ retournements.
Audin : compacité, connexité des groupes orthogonaux, $Is^+(\mathcal{E})$ est connexe par arcs.
H2G2 : $\boxed{\text{simplicité de } \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$, décomposition polaire, applications à la formule de la norme 2 et aux sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
FGNal3 : $\boxed{\boxed{\text{Points extrémaux de la boule unité de } \mathcal{L}(E)}}$.

2 Classification en dimension 1, 2 et 3

Remarque : en dimension 1, $\mathrm{O}(E) = \{\pm I_1\}$ donc ce sont les translations et les "anti-translations".

• Dimension 2 : Combes : déf symétrie glissée, le théorème de classification (on fait un tableau comme dans le Audin en rajoutant l'identité et en gardant seulement les points invariants), on met les dessins en annexe. (la classification dans le Combes est bien plus simple à comprendre)

• Dimension 3 Mercier : déf vissage, rotation axiale, rotation-symétrie
Combes : le joli tableau en dim 3 à changer en indiquant quels sont les espaces de points fixes plutôt que juste la dimension.

III Isométries conservant des objets du plan ou de l'espace

1 Isométries conservant des motifs

Berger : définition des groupes paveurs, $\boxed{\boxed{\text{Groupes paveurs}}}$, dessins en annexe, dire qu'il y en a 17 pour isométries non forcément positives, et 230 en dimension 3 (4783 en dimension 4) et que cela sert en cristallographie.

2 Isométries conservant une partie

Mercier : définition de $Is(P)$, structure de groupe, relation entre $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$, l'isobarycentre est laissé fixe.

• Dimension 2 : isométries conservant le polygone régulier (on regarde les isométries positives qui sont des rotations de centre O, et on obtient les rotations d'angle π/n, puis les antidéplacements ont un point fixe donc ce sont des réflexions de droite passant par O, on trouve facilement le résultat), dessin, c'est le groupe diédral.

- Dimension 3 : Ulmer : $\boxed{\text{sous-groupes finis de } \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$

Mercier/H2G2 : groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Remarques : rapport du jury : "Il semble que cette leçon soit moins choisie par les candidats depuis l'ajout de l'aspect algorithmique dans l'intitulé. A ce sujet, il faut savoir que les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus.
La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !).
Pour les candidats chevronnés, les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.
Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.
Des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon."

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
Rappaz, Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Hirriart, Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Amodei, *Analyse numérique matricielle*
Quarteroni, Sacco, Saleri, *Méthodes numériques*
Allaire, *Analyse numérique et optimisation*
Filbet, *Analyse numérique*

Cadre : on se place sur un corps $\mathbb{K}$.

I Systèmes linéaires

1 Position du problème

Grifone : déf système linéaire, solution, compatibilité, expression matricielle, rang.
? : exemple d'un système non-compatible.

2 Systèmes de Cramer

Grifone : déf système de Cramer, il admet une unique solution, formules de Cramer, exemple.
Ciarlet : complexité de cette méthode, c'est horrible.

3 Stabilité numérique d'une résolution de système linéaire

Ciarlet : le conditionnement, les deux théorèmes d'erreurs possibles.
Le conditionnement révèle si la matrice est facile à inverser numériquement.
Ex : la matrice identité est bien conditionné, la matrice du laplacien elle devient de plus en plus difficile à inverser avec la dimension qui croît.

4 Cas général

Grifone : on se ramène à une matrice de rang r, réécriture du nouveau système, théorème de Rouché-Fontené, exemple.

II Résolution directe de systèmes linéaires

Dans cette partie, on étudie la résolution de systèmes de Cramer. On dit que tout s'étend sans avoir des matrices carrées inversibles mais comme on ne l'utilise jamais, on s'en fout.

1 Opérations élémentaires

OA : les opérations élémentaires, les appliquer ne change pas la solution, leurs matrices associées, effet sur les lignes/colonnes.
H2G2 : but : obtenir un système échelonné, déf, en quoi c'est cool.

2 Méthode du pivot de Gauss

Ciarlet : l'algorithme en précisant bien le cas où le pivot est nul, intérêt d'avoir une matrice triangulaire, exemple, complexité.
En remarque : il faut des pivots grands sinon on a des problèmes de stabilité numérique.

H2G2 : Applications du pivot de Gauss.

3 Décomposition LU

Ciarlet : décomposition LU.
Amodei : décomposition PLU.
Ciarlet : utile pour la résolution de plusieurs systèmes linéaires avec A fixé, le cas des matrices par bandes, complexité !
? : dans scilab, c'est cette algorithme qui calcule $A\backslash b$.

4 Décomposition QR

Ciarlet/Amodei : déf matrice de Householder, l'algorithme, le théorème de décomposition QR, complexité, c'est la décomposition de Gram Schmidt, on ne fait pas Gram Schmidt numériquement car elle propage les erreurs d'arrondis assez fortement.

III Résolution numérique de systèmes linéaires

1 Méthodes itératives linéaires

Rappaz, Picasso : la décomposition de A, l'algorithme, théorème de convergence + vitesse de décroissance de l'erreur, méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, les cas particuliers de convergence, l'exemple de la matrice laplacien, la méthode de relaxation.
Ciarlet : elle ne peut converger que si $\omega \in]0,2[$, comparaison Jacobi et Gauss-Seidel, comparaison Jacobi et relaxation, le ω optimal.

2 Méthode de Kacmarz

? : méthode de Kacmarz

3 Méthodes de gradient

En fait, on cherche juste à minimiser la fonctionnelle $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)$. Attention, il faut $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$!
Allaire : méthode de gradient à pas fixe, convergence.
Hirriart, Urruty : lemme de Kantorovitch, méthode de gradient à pas optimal, remarque sur la dépendance au conditionnement, dessin.

4 Moindres carrés

Amodei/Filbet : méthode des moindres carrés.

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Questions : → Quand $\mathrm{O}(Q)$ est-il compact ?
Par l'homéomorphisme $\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$, on voit que Q doit être définie positive ou négative.

→ Un groupe fini G préserve un produit scalaire.
$\langle x,y\rangle := \sum_{g\in G}(gx,gy)_{\mathbb{R}^n}$

Remarques : Il est à mon avis trop risqué de parler des formes quadratiques hermitiennes : elles n'apportent pas grand chose de plus à la théorie et restent une source de contre exemples assez importante.
Par contre, il sera apprécié d'avoir une culture sur le groupe orthogonal associé à une forme quadratique.

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
(Lelong-Ferrand, Arnaudiès, *Cours de mathématiques - tome 1 - Algèbre*)
Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Perrin, *Cours d'algèbre*
De Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*

Cadre : On se donne E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n ou $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique $p \neq 2$.
On fait le choix de ne pas parler des formes quadratiques hermitiennes.

I Généralités sur les formes quadratiques

1 Définition des formes quadratiques

Grifone : déf des formes quadratiques avec les polynômes homogènes (insister sur le fait que j'ai pris cette définition car elle est plus simple vu que je travaille en dim finie), déf/prop sur la forme polaire avec la définition de j l'isomorphisme d'espace vectoriel.
Enfin on donne l'exemple du produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, de la forme de Lorentz.
On fait une remarque sur la définition des formes quadratiques en dimension infinie avec l'exemple sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Forme matricielle associée à une forme quadratique

Grifone : définition de la forme matricielle associée à q, de l'effet d'un changement d'un base. Puis définition du rang de q, il est invariant par changement de base, son sens pour b.
Déf du noyau, déf d'être non dégénérée, équivalence avec la non nullité du déterminant.
Formule $\dim(E) = \mathrm{rg}(b) + \dim(N(b))$.
Exemple.

3 Formes quadratiques positives, définie positives

Gourdon algèbre : déf formes (définies) positives, Cauchy-Schwarz, cas d'égalité si définie, définie ssi non dégénérée, Minkowski.

II Orthogonalité et isotropie

1 Orthogonalité

Grifone : déf de l'orthogonal, premières propriétés, proposition sur la dimension (important !)

2 Bases orthogonales

Grifone : déf base orthogonale/orthonormée, théorème d'existence d'une base orthogonale, Méthode de Gauss.

3 Isotropie

Grifone : déf cône isotrope, $N \subset I$
Sans référence : cône de lumière pour la forme de Lorentz, c'est pour ça qu'on l'appelle cône isotrope.
Grifone : déf sous espace isotrope, si F non isotrope alors $E = F \oplus F^{\perp}$ (en appliquant les relations du dessus).
De Seguins Pazzis : déf plan hyperbolique, quelques caractérisations, droites isotropes, espace hyperbolique, décomposition d'un espace quadratique en espace hyperbolique et espace anisotrope, théorème de Witt.

III Réduction et classification des formes quadratiques

1 Classification, recherche des orbites

Perrin : déf de la relation d'équivalence, du discriminant défini aux carrés près, $q \simeq q'$ implique égalité du rang et du discriminant, ce n'est pas suffisant : contre exemple $\pm(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}$.
Grifone : théorème de Sylvester, déf de la signature, liens avec la définie positivité, non dégénérescence.
Perrin : il y a $n + 1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{R}$.
thm 6.6 de classification pour $\mathbb{F}_q$ et $\mathbb{C}$.

2 Réduction sur un espace euclidien

Grifone : théorème de réduction simultanée, la méthode de réduction simultanée sur un exemple. On dit qu'elle est moins efficace que la méthode de Gauss mais elle permet d'obtenir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant.

Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée (sans dilater/contracter la quadrique).
FGNal3 : ellipsoïde de John Loewner

IV Groupe orthogonal d'une forme quadratique

1 Définition et intérêt

Grifone : déf/prop d'un endomorphisme orthogonal relativement à q, déf de $\mathrm{O}(q)$, c'est un groupe, caractérisation matricielle de $\mathrm{O}(q)$ (+cas où la base est orthonormée pour q), le déterminant vaut 1 ou -1, déf SO.
On peut s'intéresser à $\mathrm{O}(sign(q))$ au lieu de $\mathrm{O}(q)$ car ils sont congruents.
H2G2 : les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à des sous-groupes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Sans référence : groupe de Lorentz associé à la forme de Lorentz $\mathrm{O}(3,1)$ (on verra pourquoi il est noté comme ça plus tard, on n'a pas encore défini la signature), groupe de Poincaré complet $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{O}(3,1)$ est le groupe des isométries affines de notre espace (le produit semi direct étant l'opération classique correspondant au biais de translation sur $\mathbb{R}^n$).
En physique, $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ correspond aux changements de référentiels de la relativité restreinte qui envoient un repère inertiel sur un autre, tout en conservant leur orientation aussi bien spatiale que temporelle.
Grifone : ex du groupe de Lorentz simplifié dans $\mathbb{R}^2$ dans l'ex 26.

2 Décomposition polaire

H2G2 : la décomposition polaire, applications.
exp réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.
Étude de $\mathrm{O}(p,q)$, corollaires.

V Quelques applications

1 Classification des coniques et quadriques

Grifone (dans les annexes) : déf d'une conique/quadrique, faire un tableau rang/signature/cône isotrope/k>0/k<0 avec les noms des coniques/quadriques correspondantes, puis dessins en annexe.

2 Étude de la hessienne

Gourdon analyse : déf Hessienne, c'est une forme quadratique, théorème de Schwarz donne la symétrie, thm de lien entre extremum et (défini) positivité/négativité, cas de la dimension 2.
Rouvière : Lemme de Morse (en insistant sur le lien entre cône isotrope et les intersections de f avec son plan tangent ! ! !)

171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ (classique) Montrer l'existence d'une base orthogonale pour toute forme quadratique réelle.
Soit on applique l'algorithme de Gauss, soit par récurrence :
Si $n = 1$, toute base est orthogonale.
Si vrai au rang n, soit $q = 0$ et c'est bon, sinon il existe e_{n+1} tel que $q(e_{n+1}) \neq 0$. On définit F le sous espace engendré par e_{n+1}. $F^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $B(e_{n+1}, .)$ et est donc de dim n. Si F était isotrope, on aurait $F \subset F^\perp$. Or $q(e_{n+1}) = B(e_{n+1}, e_{n+1}) \neq 0$ donc c'est impossible. Donc F est non isotrope et $F \oplus F^\perp = E$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$, on a le résultat.
$\rightarrow$ Qu'est-ce qu'une classification ?
C'est se donner une relation d'équivalence (par exemple, être égal à changement de base près) et regarder les classes pour cette relation.

Remarques : J'aime bien cette leçon.
Il y a une immense différence entre une application homogène et un polynôme homogène. Attention !
Le rang de b n'est pas la dimension de $\mathrm{Im}(b)$ (qui est de dimension 0 ou 1 au passage).
On peut utiliser l'autre définition des formes quadratiques (en utilisant la forme polaire). On peut alors définir des formes quadratiques en dimension infinie. Néanmoins, sur $\mathbb{C}$, on aura tendance à lier les formes quadratiques aux formes hermitiennes. On a alors deux réductions différentes : l'une en somme de carrés avec des coefficients 1, l'autre en somme de modules au carré avec des coefficients ± 1.

Références : Grifone, *Algèbre linéaire*
(Lelong-Ferrand, Arnaudiès, *Cours de mathématiques - tome 1 - Algèbre*)
Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Perrin, *Cours d'algèbre*
De Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*

Cadre : on n'étudiera seulement des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie n.

I Généralités sur les formes quadratiques

1 Définition des formes quadratiques

Grifone : déf des formes quadratiques avec les polynômes homogènes (insister sur le fait que j'ai pris cette définition car elle est plus simple vu que je travaille en dim finie), déf/prop sur la forme polaire avec la définition de j l'isomorphisme d'espace vectoriel.
Enfin on donne l'exemple du produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, de la forme de Lorentz.
On fait une remarque sur la définition des formes quadratiques en dimension infinie avec l'exemple sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Forme matricielle associée à une forme quadratique

Grifone : définition de la forme matricielle associée à q, de l'effet d'un changement d'un base. Puis définition du rang de q, il est invariant par changement de base, son sens pour b.
Déf du noyau, déf d'être non dégénérée, équivalence avec la non nullité du déterminant.
Formule $\dim(E) = \mathrm{rg}(b) + \dim(N(b))$.
Exemple.

3 Formes quadratiques positives, définie positives

Gourdon algèbre : déf formes (définies) positives, Cauchy-Schwarz, cas d'égalité si définie, définie ssi non dégénérée, Minkowski.

II Orthogonalité et isotropie

1 Orthogonalité

Grifone : déf de l'orthogonal, premières propriétés, proposition sur la dimension (important !)

2 Isotropie

Grifone : déf cône isotrope, $N \subset I$
Sans référence : cône de lumière pour la forme de Lorentz, c'est pour ça qu'on l'appelle cône isotrope.
Grifone : déf sous espace isotrope, si F non isotrope alors $E = F \oplus F^{\perp}$ (en appliquant les relations du dessus).
De Seguins Pazzis : déf plan hyperbolique, quelques caractérisations, droites isotropes, espace hyperbolique, décomposition d'un espace quadratique en espace hyperbolique et espace anisotrope, théorème de Witt.

III Réduction et classification des formes quadratiques

1 Bases orthogonales et loi d'inertie de Sylvester

Grifone : déf base orthogonale/orthonormée, théorème d'existence d'une base orthogonale, théorème de Sylvester, déf de la signature, liens avec la définie positivité, non dégénérescence.
On peut s'intéresser à $\mathrm{O}(sign(q))$ au lieu de $\mathrm{O}(q)$ car ils sont congruents.
Méthode de Gauss sur un exemple. (cas avec un carré, cas sans carré)
Perrin : il y a $n + 1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{R}$.

2 Réduction sur un espace euclidien

Grifone : théorème de réduction simultanée, la méthode de réduction simultanée sur un exemple. On dit qu'elle est moins efficace que la méthode de Gauss mais elle permet d'obtenir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant.
Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée (sans dilater/contracter la quadrique).
FGNal3 : $\boxed{\text{ellipsoïde de John Loewner}}$

IV Groupe orthogonal d'une forme quadratique

1 Définition et intérêt

Grifone : déf/prop d'un endomorphisme orthogonal relativement à q, déf de $\mathrm{O}(q)$, c'est un groupe, caractérisation matricielle de $\mathrm{O}(q)$ (+cas où la base est orthonormée pour q), le déterminant vaut 1 ou -1, déf SO.
On peut s'intéresser à $\mathrm{O}(sign(q))$ au lieu de $\mathrm{O}(q)$ car ils sont congruents.
H2G2 : les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à des sous-groupes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Sans référence : groupe de Lorentz associé à la forme de Lorentz $\mathrm{O}(3,1)$ (on verra pourquoi il est noté comme ça plus tard, on n'a pas encore défini la signature), groupe de Poincaré complet $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{O}(3,1)$ est le groupe des isométries affines de notre espace (le produit semi direct étant l'opération classique correspondant au biais de translation sur $\mathbb{R}^n$).
En physique, $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ correspond aux changements de référentiels de la relativité restreinte qui envoient un repère inertiel sur un autre, tout en conservant leur orientation aussi bien spatiale que temporelle.
Grifone : ex du groupe de Lorentz simplifié dans $\mathbb{R}^2$ dans l'ex 26.

2 Décomposition polaire

H2G2 : la décomposition polaire, applications.
exp réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.
$\boxed{\text{Étude de } \mathrm{O}(p,q)}$, corollaires.

V Quelques applications

1 Classification des coniques et quadriques

Grifone (dans les annexes) : déf d'une conique/quadrique, faire un tableau rang/signature/cône isotrope/k>0/k<0 avec les noms des coniques/quadriques correspondantes, puis dessins en annexe.

2 Étude de la hessienne

Gourdon analyse : déf Hessienne, c'est une forme quadratique, théorème de Schwarz donne la symétrie, thm de lien entre extremum et (défini) positivité/négativité, cas de la dimension 2.
Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$ (en insistant sur le lien entre cône isotrope et les intersections de f avec son plan tangent !!!)

180 - Coniques. Applications.

Questions : → Qu'est ce qu'une classification ?
Une relation d'équivalence (ex : avoir la même signature).

→ Qu'est-ce que le complexifié d'un espace vectoriel, affine, projectif ?
Voir Berger, c'est dur ! On définit E^C comme le produit cartésien $E \times E$ muni des lois classiques des complexes pour en faire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour l'espace affine, on complexifie l'espace vectoriel associé et il faut aussi changer l'espace affine mais c'est dur. Enfin pour le projectif, on construit le projectivisé de l'espace vectoriel de départ complexifié.

→ Et le projectivisé d'un espace vectoriel ? affine ?
Pour le vectoriel, on donne le quotient, OK.
Pour le projectif (voir Berger encore), c'est MOCHE. Mais il faut y penser comme $\mathcal{E} \cup \mathbb{P}(E)$.

→ Ah ! Et pendant qu'on en parle, vous connaissez des espaces affines dans la vraie vie de la réalité véritable ?
Oui ! Il y a les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, mais aussi d'autres espaces plus exotiques comme l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire (solution particulière + solutions homogènes).

→ D'où vient le mot conique ?
Une conique propre est l'intersection d'un plan avec un cône. En effet, en projectif, on prend la forme quadratique $X^2 + Y^2 - T^2$. Son espace isotrope est un cône et on "évalue" en $T = 1$, donc on coupe par un plan, ce qui donne une ellipse. Si on avait évalué en $Y = 1$, on aurait eu une hyperbole. La parabole pour sa part est un peu plus compliquée mais c'est pareil, il suffit d'un changement de variable.

→ Intersections de cercles
On pose les équations cartésiennes, on trouve les intersections réelles et dans le complexifié, puis on homogénéise et on cherche les intersections à l'infini ($T = 0$).

→ Effet d'une transformation bijective affine sur une conique ?
La translation déplace le centre, puis on opère un changement de base par la transformation vectorielle sous-jacente : la matrice P. Si notre conique est définie au départ par ${}^{\mathrm{t}}xQx = 0$, alors on aura la nouvelle conique ${}^{\mathrm{t}}x{}^{\mathrm{t}}PQPx = 0$ avec une translation.

→ Déterminer une paramétrisation rationnelle du cercle unité.
On prend un point sur le cercle, ici $(-1, 0)$, puis on choisit un autre point (x, y) du cercle et on trouve l'équation de la droite passant par nos deux points : $y(t) = tx + t$.
Puis $x^2 + y^2 = 1$ donne $(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. On factorise par $x + 1$ pour avoir l'égalité concernant le point (x, y) : on a $(x + 1)(x(1 + t^2) + t^2 - 1) = 0$.
D'où $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et on en déduit $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.
En traçant la figure, avec le théorème de l'angle inscrit/angle au centre, on trouve que $t = \tan(\theta/2)$ où θ est l'angle fait par la droite liant le centre et (x, y) avec l'axe des abscisses.

Remarques : Le rapport du jury est assez pertinent sur cette leçon :"La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différente selon le cas. Souvent le candidat annonce qu'il va classifier les coniques mais sans être capable de préciser la nature de cette classification. Plus généralement, il serait bien que les candidats aient réfléchi à ce que l'on entend par classification en mathématiques. On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles."
La notation du plan projectif dans le Ladegaillerie est un peu confondante : il écrit $\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$ le plan projectif au

lieu de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$...
L'étude des coniques remonte au moins à la Grèce antique, où on les définissait comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

Références : Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Audin, *Géométrie*
Berger, *Géométrie 1* (pour toutes les questions existentielles sur les espaces manipulés)
Mercier, Rombaldi, *Annales du CAPES externe 2009-2011*
Debeaumarché, *Manuel de mathématiques, tome 1*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie - tome 2*

Cadre : On se donne un plan affine réel $\mathcal{E}$ et on se donne $\mathbb{R}^2$ son espace des directions. On s'autorise à complexifier l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}^2$ pour étudier les coniques "imaginaires". Puis on notera $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ le projectivisé de $\mathcal{E}$ et $\mathbb{P}^{\mathbb{C}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\mathbb{C}} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ son complexifié.
On déclare ici qu'on peut prendre des espaces de directions plus généraux mais que l'on étudiera que ceux-là, car on ne maîtrise pas les autres !

I Définition et classification des coniques

1 Introduction projective des coniques

Ladegaillerie : déf des coniques comme les zéros d'une forme quadratique (rajouter qu'elle doit être non nulle !!!), déf des points imaginaires, d'une conique dégénérée/propre, équation d'une conique et matrice associée.
Rappeler à l'oral que en réel cela revient à oublier les points à l'infini $(x : y : 0)$ pour étudier les points $(x : y : 1)$ et que cela fait donc disparaître l'inconnu T.
déf du rang, c'est une courbe algébrique de degré 2.

2 Classification projective

On peut classifier les coniques selon la signature de la forme quadratique associée. C'est la définition de classification qu'attend le jury.
On rappelle à l'oral que cela se fait avec le théorème d'inertie de Sylvester.
Audin : cette classification décrit les orbites de l'ensemble des coniques pour le groupe des isométries affines.

• Classification complexe :
Ladegaillerie : les 3 formes. C'est la manière la plus simple de les voir !

• Classification réelle :
Ladegaillerie : les 5 formes, classifier en imaginaire/réel, et par rang.

3 Coniques affines et heuristique projective

On se donne un repère affine de $\mathcal{E}$ et note O son centre (je rappelle qu'il est choisi arbitrairement.).

Ladegaillerie : déf d'une conique affine, décomposition en ξ, λ et α avec ξ la forme quadratique à l'infini (en évaluant en $T = 0$), équation homogène de la conique, les déf sont les mêmes qu'en projectif.
Existence du centre (que l'on placera en O pour simplifier), puis classification totale avec les dessins. On fait des cases dans la tableau pour faire correspondre aux cas étudiés en projectif (la classification est un peu mal foutue dans le Ladegaillerie...).
Étude la forme quadratique à l'infini, on rajoute les dessins p433 pour voir comment on découpe une ellipse projective pour donner les 3 coniques propres bien connues.

II Caractéristiques des coniques propres dans un espace euclidien

On se donne un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ et on va tenter de décrire les coniques dans des bases orthonormées.
Ladegaillerie : axes principaux (ceux réduisant ξ), classification en base orthonormée (rapide).
théorème de génération monofocale des coniques propres non circulaires +dessin, vocabulaire : foyer, directrice, excentricité, axe focal, distance focal, paramètre.
Toute conique propre est l'ensemble des centres des cercles passant par un point F et tangents à une droite (parabole) ou un cercle.

• Ellipse :
Ladegaillerie : formulaire, second foyer et directrice, construction du jardinier =)

• Parabole :
Ladegaillerie : formulaire, unique foyer et directrice, propriété optique

• Hyperbole :
Ladegaillerie : formulaire, déf équilatère

→ On s'aide du Debeaumarché pour compléter le formulaire.
Audin : (ex 8.1) Méthode pour déterminer une paramétrisation rationnelle d'une conique, exemple de celle bien connue (ou pas) du cercle.

III Propriétés géométriques

1 Tangentes, homographies et birapport

Ladegaillerie : équation des tangentes, théorème de Poncelet
Capes 2009 : ellipse de Steiner.
Ladegaillerie : stabilité des coniques par homographie, déf du birapport sur une conique, il est constant. Axe d'une homographie, théorème de Pascal, en remarque : comparaison avec Pappus.

2 Intersections de coniques

Rappel : la multiplicité d'un point d'intersection est la multiplicité algébrique de la racine de l'équation obtenue.
Ladegaillerie : théorème de Bézout projectif !
En affine, au plus 4 points d'intersections, dessins.

IV Applications

1 Coniques en mécanique des corps célestes

Debeaumarché : déf force centrale, accélération newtonienne, la trajectoire est une conique **propre** dont le soleil est l'un des foyers, lois de Kepler.

2 Coniques en théorie des nombres

Combes/Audin : paramétrisation rationnelle du cercle et application à l'équation de Fermat pour $n = 2$.
H2G22 : déf de la loi $*$, cela définit un groupe, exemple dans le cas de l'hyperbole.
Équation de Pell-Fermat.

181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Questions : $\rightarrow$ On se donne un tétraèdre régulier inclus dans une sphère de rayon 1. Quelle est sa hauteur ? On ne sait pas quoi faire donc on fait un dessin en dimension 2 : on trouve $h = \frac{3}{2}$. Puis on fait un dessin en dimension 3, et on remarque que $O = Bar((H,3),(C,1))$ avec $H = Isobar(A,B,D)$, donc $3\vec{OH} + \vec{OC} = 0$, donc $OH = \frac{1}{3}$, d'où $h = \frac{4}{3}$.

$\rightarrow$ Une application affine non bijective ?
Une projection orthogonale ou tout $x \mapsto Mx + b$ avec M non inversible...

$\rightarrow$ Pour tout contre exemple recherché, penser au graphe de $\frac{1}{x}$ (modulo union avec le singleton $(0,0)$) sur $\mathbb{R}^{+*}$... Ça marche bien !

Remarques : Il faut parler de coordonnées barycentriques, d'enveloppe convexe et de points extrémaux.
Il y a une pléthore de questions insupportables à poser sur cette leçon. Le jour de l'oral, il faut faire un dessin, ne pas se démonter et au moins faire les cas simples.
Un exemple d'espace affine à se souvenir : $\mathbb{R}^2$ avec comme espace vectoriel associé lui même. L'application qui à (A,B) associe $\vec{AB}$ est $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (x_2-x_1, y_2-y_1)$. En gros, il faut retenir $\vec{AB} = B - A$.
Attention, toutes les applications affines ne sont pas de partie linéaire bijective ! On les considère en général pour former le groupe $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ des transformations inversibles. On a alors $\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{GL}(E) \rtimes E$.

Références : Mercier, *Cours de géométrie*
Truffault, *Géométrie élémentaire*
Tauvel, *Géométrie*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Mercier, Rombaldi, *Annales du CAPES 2009 à 2011*
Hirriart-Urruty, *Analyse convexe*

Cadre : On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension finie n et on note E l'espace vectoriel associé.

I Barycentres

1 Définition et premières propriétés

Mercier : déf fonction de Leibniz, voir quand elle est bijective, déf barycentre. On définit l'isobarycentre.
Puis homogénéité et commutativité du barycentre.
Enfin associativité et applications de celle-ci :
1) 19.1, construction d'un barycentre à la règle et au compas (avec connaissance des longueurs associées aux α_i).
2) isobarycentres du triangle (centre de gravité), d'un tétraèdre (situé aux $\frac{3}{4}$ de chaque segment reliant sommet et centre de gravité de la face opposé (, d'un parallélogramme).

2 Liens avec la structure affine

Mercier : (p33) déf de sous-espace affine engendré par A comme le plus petit sous-espace affine contenant A. Le sous-espace affine engendré par A non vide est l'ensemble des barycentres de A. Application à A simple : deux points, trois points non alignés.
F sous-espace affine ssi F stable par barycentration.
(p 47) une application est affine ssi elle conserve les barycentres (preuve par cœur !). Application : $f(\text{Aff}(A)) = \text{Aff}(f(A))$. On appliquera à nouveau cette propriété $(*)$ fondamentale plus tard.

3 Repérage

Mercier : déf famille affinement libre (avec équivalences du thm 11), déf repère affine, $E = A_0 + \text{Vect}(\{\overrightarrow{A_0A_i}, i \in [\![1, n]\!]\})$, en remarque : ça ressemble pas mal aux bases d'ev.
Système de coordonnées barycentriques, la proportionnalité, normalisé + son unicité.
Truffault : déf aire algébrique, méthode/thm : les aires algébriques de MBC, MCA, et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

4 Quelques résultats sur le triangle

Applications du résultat précédent au calcul de coordonnées barycentriques de certains points remarquables d'un triangle :
1) centre de gravité/intersection des médianes $(1, 1, 1)$,
2) centre du cercle inscrit/intersection des bissectrices : (a, b, c),
3) centre du cercle circonscrit/intersection des médiatrices : $(\sin(2\alpha), \sin(2\beta), \sin(2\gamma))$,
4) orthocentre/intersection des hauteurs : $(\tan(\alpha), \tan(\beta), \tan(\gamma))$.
→ On peut retrouver les points remarquables et leurs propriétés dans le Tauvel de Géométrie, et le détail des coordonnées barycentriques avec autre preuve dans le Algèbre 3 de Ruaud et Warusfel.
Truffault : thm de Céva + dessin, thm de Ménélaüs.
Rajouter le théorème de Pascal que l'on peut prouver avec Ménélaüs.
CAPES 2009 : ellipse de Steiner

II Convexité

1 Définition

Tauvel : déf d'une combinaison convexe, reformulation en terme de barycentres, déf étoilée, convexe. A convexe ssi toute combinaison convexe de points de A est dans A. Plein de petites propriétés...
Hirriart-Urruty : $\boxed{\text{Inégalité de Kantorovitch + gradient à pas optimal}}$.
Mercier : appli de $(*)$: l'image directe/ réciproque d'un convexe par une application affine est un convexe.

2 Enveloppe convexe

Tauvel : déf de enveloppe convexe, théorème de Gauss-Lucas (utiliser la formule $\frac{P'}{P}$, soit on est une racine de P et c'est évident, sinon on évalue la formule en cette racine, on multiplie par le conjugué au dénominateur et on tombe sur une formule définissant la racine comme un barycentre des racines de P'), petites propriétés, contre

exemple pour dire que l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas toujours fermée, théorème de Carathéodory, appli sur les cas compact et borné.
Mercier : appli de ($*$) : l'image de l'enveloppe convexe d'une partie par une application affine est l'enveloppe convexe de l'image de cette partie.

3 Points extrémaux

Tauvel : déf points extrémaux, exemple de la boule, propriétés, Krein-Milman.
FGNal3 : $\boxed{\text{Points extrémaux de la boule unité de } \mathcal{L}(E)}$ + on insiste sur la conséquence Krein-Milman.

4 Projection et séparation

Tauvel : Théorème de projection (le lemme 4.5.1+ la prop 4.5.2) et théorème de Motzkin.
Déf de la séparation au sens large et stricte, Hahn Banach géométrique (première et deuxième forme), en remarque : on démontre Krein-Milman avec.

182 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

À rajouter : suites homographiques ?, réduction de SL2 ?

Questions : → Topologie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$?
Ce sont les complémentaires des compacts auxquels on ajoute le point à l'infini et les ouverts de $\mathbb{C}$.

→ Pour la projection stéréographique, le fait de choisir le plan équateur est-il important ?
Non n'importe quel plan parallèle au plan tangent convient.

→ Soit f une application préservant le birapport, montrer que c'est une homographie.
Soient a, b et c distincts, alors il existe une unique homographie h telle que $[a, b, c, x] = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
De même on a $\tilde{h}$ tel que $[f(a), f(b), f(c), y] = \tilde{h}(y)$.
On a donc $h(x) = [a, b, c, x] = [f(a), f(b), f(c), f(x)] = \tilde{h}(f(x))$ et on en déduit que $f = \tilde{h}^{-1}h$ est une homographie.

Remarques : rapport du jury 2015 : "L'étude des inversions est tout à fait appropriée dans cette leçon, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement. La formule de Ptolémée, pour donner un exemple, illustre bien l'utilisation de cet outil.
On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbb{C})$.
Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée.
La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon."
Bref c'est une bonne leçon de merde ! En fait je ne vois même pas l'intérêt de faire faire une telle leçon aux étudiants, alors que tous les professeurs sont conscients du niveau des étudiants en géométrie... C'est juste stupide. Il vaut mieux rajouter des leçons en théorie de Galois, distributions ou autres trucs durs car ceux là, au moins, on a eu des cours dessus.
Je vais tenter de faire une bonne leçon quand même, histoire d'aider les suivants...
Faire des dessins, ça compensera peut être les lacunes de cette leçon.
Pour le projectif, on rappelle que le choix du point à l'infini est arbitraire ! ! !
Pour les homographies, il est marqué dans absolument tous les bouquins que l'application qui à une matrice associe l'homographie correspondante est un morphisme... Et bien c'est faux, c'est un antimorphisme ! (calcul facile laissé aux lecteurs qu'ils disaient... Bande de baltringues)
Faire attention aux conventions ! Il y a plein de pièges sur les inversions, les birapports... Attention aussi au fait que les inversions sont conformes *indirectes* !

Références : Eiden, *Géométrie analytique classique*
Nourdin, *Agrégation de mathématiques - épreuve orale*
Audin, *Géométrie*
Mercier, *Cours de géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Laville, *Courbes et surfaces*
Tauvel, *Géométrie*
Mercier, Rombaldi, *Annales du CAPES 2009 à 2011*

I Géométrie euclidienne du plan

On se donne $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé associé. On explique qu'en fixant le point O, on peut interpréter tout point M de $\mathcal{P}$ comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de $\mathbb{R}^2$ (l'espace vectoriel associé). On interprète alors $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{C}$ et cela va nous aider à simplifier les calculs et à mieux comprendre les objets mis en jeu. Un des outils majeurs est l'écriture sous la forme polaire $z = re^{i\theta}$.

1 Modélisation du plan par $\mathbb{C}$

Eiden : l'intérêt de $\mathbb{C}$ est qu'il pose une structure de corps commutatif sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ associé à $\mathcal{P}$. Il n'y a malheureusement pas d'analogue sur les autres $\mathbb{R}^p$. On verra des compensations (quaternions) plus tard.
déf affixe, valeur de $\bar{z}z'$, exemples des équations de droites, cercles, coniques.
Nourdin : l'exponentielle permet l'écriture des complexes sous la forme $re^{i\theta}$, détailler un peu les propriétés comme le demande le jury.

2 Transformations du plan

• Isométries :
Audin : définition d'une isométrie (affine), caractérisation, exemple des translations, réflexions+leur forme, une isométrie est bijective.
Mercier : La décomposition canonique en translation et isométrie avec la définition de l'espace des vecteurs invariants par $\vec{f}$, si l'espace invariant de $\vec{f}$ est réduit à $\vec{0}$ alors f admet un unique point invariant.
Audin : le groupe orthogonal (rapidement) et écrire la propriété fondamentale : O_2^+ est isomorphe/homéomorphe à $\mathbb{U}$.
Sans réf : la forme des isométries est donc $z \mapsto e^{i\theta}z + b$ ou $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + b$.

• Similitudes : Audin : déf, c'est la composée d'un homothétie avec une isométrie, elles sont bijectives, décomposition des similitudes directes/indirectes, propriétés, centre d'une similitude, la forme analytique des similitudes est $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, caractérisation d'une similitude, dessins.

• Inversions : Audin : définition d'une inversion puis on rajoute la définition géométrique du Eiden (attention au conjugué !!!), les droites et cercles sont transformés en droites et cercles par une inversion. A l'oral, on dit qu'en fait il faut voir les droites comme des cercles dont un des points est à l'infini...
Eiden : théorème de Ptolémée.

3 Barycentres

Tauvel : déf barycentre, théorème de Gauss-Lucas.
CAPES 2009 : ellipse de Steiner

II Droite projective

Dans le Ladegaillerie, il est question de plonger un espace affine dans un espace projectif, mais c'est trop compliqué à mettre en relation avec les notions de cette leçon. On ne le fera donc pas.

1 Construction de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Audin/H2G2 : déf $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (avec la colinéarité), interprétation avec les droites, on met la topologie quotient, $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$+dessin, dimension. Penser à mettre la projection stéréographique $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}_2$.
Ladegaillerie : application du formalisme au théorème de Pappus.

2 Action des homographies sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Audin : déf homographies, on les prolonge sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
H2G2 : déf $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, triple transitivité.
Déf birapport (attention aux conventions qui changent entre bouquins !), propositions cool.
Audin : pour que 4 points soient alignés, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.

3 Applications conformes

Ladegaillerie : déf transformation conforme (directe/indirecte), ex de $\mathbb{C}$ où ce sont exactement les similitudes affines.
Sans référence : l'inversion n'est pas définie en 0, du coup ce n'est pas une appli conforme sur $\mathbb{C}$, mais sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, c'en est une ! Cela permet d'arriver aux homographies.
Audin : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse (une inversion *analytique*), les homographies sont conformes directes (car l'application conjugué et l'inversion sont conformes indirectes).
Ladegaillerie : sphère de Riemann, dessin, les droites et cercles de $\mathbb{C}$ sont des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Audin : groupe circulaire, ses éléments sont exactement les applications conservant les "cercles" de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

III Quelques autres applications

1 Les quaternions en géométrie

En dimension 1, on a le corps $\mathbb{R}$. En dimension 2, on peut interpréter $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{C}$, et en dimension 3, la déchéance commence ! Mais une algèbre peuplée d'irréductibles quaternions résiste encore et toujours à l'envahisseur...
H2G2 : déf de l'algèbre $\mathbb{H}$, c'est un corps non commutatif, déf imaginaires quaternioniques, déf $\mathrm{SU}(2)$ isomorphe à l'ensemble des quaternions de norme 1, isomorphisme exceptionnel : $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}(3)$. Puis interprétation géométrique : $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ sont les trois directions du trièdre de $\mathbb{R}^3$. Ce que dit l'isomorphisme, c'est que pour calculer l'image d'un vecteur par une rotation (ou même la fonction de rotation), on peut faire les calculs dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ avec les éléments de $\mathbb{H}$, i, j et k (il y a une méthode pour cela) ! On peut donc utiliser les relations simples dans $\mathbb{H}$. Cette astuce est utilisée dans les logiciels de simulation 3D.

2 Polygones constructibles

Gozard : déf point/nombre constructible, les nombres constructibles sont dans des extensions quadratiques, Wantzel et son corollaire.
Mercier : construire à la règle et au compas un polygone régulier, c'est construire une racine primitive de l'unité, la déf des polynômes cyclotomiques et on dit que le polynôme minimal d'une racine n-ième de l'unité est Φ_n, puis théorème de Gauss en rappelant la déf des nombres de Fermat.
Polygones réguliers constructibles.

3 Courbes paramétrées

Laville : utilisation des nombres complexes pour les courbes paramétrées (p 44-45), exemples de paramétrisations polaires avec le cercle, les spirales.

183 - Utilisation des groupes en géométrie.

Références : Mercier, *Cours de géométrie*
Audin, *Géométrie*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*
Berger, *Géométrie 1*
Mercier, Rombaldi, *Annales du CAPES 2009 à 2011*
Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Gozard, *Théorie de Galois*

I Géométrie affine

Audin : déf d'un espace affine, son vectorialisé.

1 Groupe affine

Audin : déf application affine, exemples, la partie linéaire, compatibilité avec l'inverse, déf groupe affine, injection dans GL, forme canonique.

2 Applications dans un plan affine

Audin : théorèmes de Thalès, Pappus et Desargues, dessins en annexe.
Mercier, Rombaldi : ellipse de Steiner.

II Utilisation du groupe orthogonal en géométrie euclidienne

1 Définition des angles

Audin : déf des angles avec dessins.

2 Définitions, premiers exemples et propriétés

Mercier : définition d'une isométrie (rajouter les normes) et déf $Is(E)$, c'est un groupe, caractérisation.
Audin : exemple des translations, symétries, réflexions.
Mercier : Une isométrie est bijective, $Is(\mathcal{E}) < \mathrm{GA}(\mathcal{E})$, l'application $f \mapsto \vec{f}$ est un isomorphisme de groupes et $\vec{f} \in \mathrm{O}(E)$ (donc on va pouvoir l'étudier), puis définition de Is^+ et Is^-.
La décomposition canonique en translation et isométrie vectorielle.

3 Classification en dimension 1, 2 et 3

Aller très vite sur cette sous-partie, c'est un peu hors-sujet...
Intérêt : $Is(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \rtimes \mathrm{O}(E)$ et $Is^+(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \rtimes \mathrm{SO}(E)$
Audin : théorème de réduction
H2G2 : générateurs de $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ avec déf retournement.
Mercier : Cartan-Dieudonné : toute isométrie est le produit d'au plus $n+1$ réflexions, et tout déplacement le produit de $n+1$ retournements.

Remarque : en dimension 1, $\mathrm{O}(E) = \{\pm I_1\}$ donc ce sont les translations et les "anti-translations".
• Dimension 2 : Combes : déf symétrie glissée, le théorème de classification (on fait un tableau comme dans le Audin en rajoutant l'identité et en gardant seulement les points invariants), on met les dessins en annexe.
• Dimension 3 Mercier : déf vissage, rotation axiale, rotation-symétrie
Combes : le joli tableau en dim 3 à changer en indiquant quels sont les espaces de points fixes plutôt que juste la dimension.

4 Isométries conservant des objets du plan ou de l'espace

Berger : définition des groupes paveurs, groupes paveurs, dessins en annexe, dire qu'il y en a 17 pour isométries non forcément positives, et 230 en dimension 3 (4783 en dimension 4) et que cela sert en cristallographie.

Mercier : définition de $Is(P)$, structure de groupe, relation entre $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$, l'isobarycentre est laissé fixe.
• Dimension 2 : isométries conservant le polygone régulier, dessin, c'est le groupe diédral.
• Dimension 3 : Ulmer : sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Mercier/H2G2 : groupes d'isométries du cube, du tétraèdre et des autres solides de Platon...

III Éléments de géométrie projective

Audin : déf de $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, décomposition en $\mathbb{R}^n \cup ... \cup \{\infty\}$.

1 Action des homographies sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, birapport

Audin : sphère de Riemann pour présenter la structure de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Déf homographies, on les prolonge sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
c'est le groupe quotient $\mathrm{PGL}(E)$, elles sont déterminées par l'image de 3 pts, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse (une inversion *analytique*).
H2G2 : déf $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, triple transitivité.
Déf birapport (attention aux conventions qui changent entre bouquins !), c'est un invariant pour l'action des homographies, propositions cools.
Audin : pour que 4 points soient alignés, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.

2 Applications conformes

Ladegaillerie : déf transformation conforme (directe/indirecte), ex de $\mathbb{C}$ où ce sont exactement les similitudes affines.
Sans référence : l'inversion n'est pas définie en 0, du coup ce n'est pas une appli conforme sur $\mathbb{C}$, mais sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, c'en est une ! Cela permet d'arriver aux homographies.
Audin : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse (une inversion *analytique*), les homographies sont conformes directes (car l'application conjugué et l'inversion sont conformes indirectes).
Ladegaillerie : sphère de Riemann, dessin, les droites et cercles de $\mathbb{C}$ sont des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Audin : groupe circulaire, ses éléments sont exactement les applications conservant les "cercles" de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

3 Coniques projectives

H2G2 : déf action de congruence, théorème de Sylvester sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (on cherche un bon représentant dans une orbite d'action de groupe).
Ladegaillerie : application à la classification projective des coniques + dessins.

Ladegaillerie : stabilité des coniques par homographie, déf du birapport sur une conique, il est constant. Axe d'une homographie, théorème de Pascal.

IV Quelques autres applications

1 Les quaternions en géométrie

H2G2 : déf de l'algèbre $\mathbb{H}$, c'est un corps non commutatif, déf imaginaires quaternioniques, déf $\mathrm{SU}(2)$ isomorphe à l'ensemble des quaternions de norme 1, isomorphisme exceptionnel : $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}(3)$. Puis interprétation géométrique : $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ sont les trois directions du trièdre de $\mathbb{R}^3$. Ce que dit l'isomorphisme, c'est que pour calculer l'image d'un vecteur par une rotation (ou même la fonction de rotation), on peut faire les calculs dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ avec les éléments de $\mathbb{H}$, i, j et k (il y a une méthode pour cela) ! On peut donc utiliser les relations simples dans $\mathbb{H}$. Cette astuce est utilisée dans les logiciels de simulation 3D.

2 Groupes de Galois et constructibilité à la règle et au compas

Gozard : déf point/nombre constructible, les nombres constructibles sont dans des extensions quadratiques, Wantzel et son corollaire.
Mercier : construire à la règle et au compas un polygone régulier, c'est construire une racine primitive de l'unité, l'extension galoisienne $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ est cyclique est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, puis théorème de Gauss en rappelant la déf des nombres de Fermat.
Polygones réguliers constructibles.

190 - Méthodes combinatoires. Problèmes de dénombrement.

À rajouter : Séries de Dirichlet

Questions : → Preuve de la formule du binôme de Newton de deux manières différentes (en comptant les multiplications et par récurrence)
→ Calcul de l'inverse de la matrice de Pascal (calcul direct/ astucieux, DB p13)
→ Comment passe-t-on du cardinal de $GLn(\mathbb{F}_q)$ à celui de $SLn(\mathbb{F}_q)$? (par le déterminant en quotientant)
→ Qu'est-ce que deux coloriages du cube différents ? (pas d'isométrie envoyant l'un sur l'autre)
→ Cardinal de $GLn(\mathbb{F}_q)$? (compter les bases)
→ Donner une matrice non diagonalisable annulé par un polynôme scindé. (matrice nilpotente par exemple)
→ CNS pour qu'une matrice nilpotente soit diagonalisable ? (c'est la matrice nulle)
→ Pourquoi $a^q = a$ dans $\mathbb{F}_q$? (petit théorème de Fermat)
→ Qu'est-ce qu'un polygone convexe et une triangulation ?
→ Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de trois manières différentes.
1) dérivation de séries entières
2) double comptage avec l'ensemble $\{(a,b), a \in \mathcal{P}([1,n]), b \in a\}$
3) développer le terme général, simplifier le k sortir le n de la somme -> on retombe sur un binôme de Newton.

Remarques : il faut des MÉTHODES dans cette leçon, pas seulement des théorèmes ! Par exemple, on peut calculer un objet de plusieurs manières différentes pour avoir un fil rouge le long de cette leçon.
La récurrence n'est pas vraiment une méthode de dénombrement, elle est plus une méthode de calcul a posteriori.

Références : De Biasi, *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne*
De Biasi, *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne - Compléments d'algèbre et de géométrie*
Calais, *Éléments de théorie des groupes*
Berger, *Géométrie 1*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - algèbre 1, analyse 2*
Combes, *Algèbre et géométrie*
Ulmer, *Théorie des groupes*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 2*

Cadre : on notera $|E|$ le cardinal de l'ensemble E.

I Dénombrement direct

De Biasi : définition d'un ensemble fini par la bijection avec $\mathbb{N}$
Deux ensembles finis en bijection ont même cardinal.

1 Formule du crible et partitions

De Biasi : formule du crible et application aux partitions et au calcul de l'indicatrice d'Euler.
Application à $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^n + \mathbb{F}_q^{n-1} + ... + \mathbb{F}_q^0$: $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = q^n + ... + 1$.

Lemme des bergers (prouvé avec des partitions). Application aux nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à $n+1$ éléments.

2 Dénombrement d'espaces produits

De Biasi : déf d'un espace produit, propriété sur les cardinaux de produits dénombrables.
Application : dénombrement des applications de E vers F avec E, F des ensembles finis.
Exemple : alphabet braille, tirages ordonnés avec remise de boules, nombre de parties dans un ensemble fini, nombre à trois chiffres contenant au moins une fois 0, 3, 6, 9.

II Combinatoire

1 Arrangements et permutations

De Biasi : déf arrangements(/injections), calcul de leur cardinal.
Lien avec les injections, exemple des tirages de boules.
Déf permutations et cardinal. (On appelle ce groupe $\mathcal{S}_n$.)
FGNal1 : application au nombre de dérangements.

2 Combinaisons

De Biasi : définition des combinaisons, cardinal.
Applications : exos classiques de calcul de proba du type binomiale.
Propriétés des coefs binomiaux.
? : calcul d'une somme du type $\sum k\binom{n}{k}$.
Méthode du facteur : nombre de manières de mettre p lettres dans n boîtes aux lettres (on dessine des traits pour séparer les boîtes). (méthode utilisée en physique statistique !)

Binôme de Newton, application au calcul de l'inverse de la matrice de Pascal, puis au nombre de surjections de I_n sur I_p et enfin au calcul de d_n le nombre de dérangements (permutations sans points fixes) d'un ensemble.

III Compter avec les groupes

On précise que maintenant, on a rajouté une structure sur les ensembles étudiés. On a donc de nouvelles propriétés disponibles.

1 Cardinal d'une orbite

Calais : déf orbite puis proposition $|G.x| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$. Application au calcul de cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (par action sur les bases de $\mathbb{F}_q$) et au calcul du nombre de matrices diagonalisables dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

2 Compter les orbites

Calais : formule de double comptage : application au calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ en posant l'ensemble $\{(a,b), a \in \mathcal{P}([1,n]), b \in a\}$ et à la démonstration de la formule de Burnside.

Attention ! Il faut modifier celle du Calais en la forme plus jolie : nombre d'orbites $= |X/G| = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$.

En exemple, on a le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = (\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{F}_q) \smallsetminus \{0\})/\mathbb{F}_q^*$, le nombre de colliers invariants par rotations, de coloriages du cube, de grilles de sudokus différentes, etc... Il y a plein d'applications sympas sur la page `http://eljjdx.canalblog.com/archives/2012/02/26/23585364.html`.

Berger : $\boxed{\text{Groupes paveurs}}$.

Ulmer : $\boxed{\text{Sous-groupes finis de } SO_3(\mathbb{R})}$.

H2G22 : $\boxed{\text{Cône nilpotent}}$.

IV Fonctions multiplicatives

- L'indicatrice d'Euler

Gourdon : déf, multiplicativité, c'est le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$ et théorème d'Euler, formule explicite avec les nombres premiers, ex de calcul, $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$.

Combes : application pour montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

- La fonction de Möbius

Francinou-Gianella : déf de μ, multiplicativité, formule d'inversion, $\boxed{\text{irréductibles de } \mathbb{F}_q}$.

Ramis Warusfel Moulin : formule liant φ et μ

V Séries génératrices

De Biasi 2 : déf rapide des séries formelles et explication de la méthode en recalculant d_n. De Biasi 1 donne l'autre application des nombres de Catalan (=le nombre de triangulations).

FGNal1 : nombres de Bell (et aussi nombres de Catalan, calcul de d_n...)

FGNan2 : $\boxed{\text{Partitions d'un entier en parts fixées}}$

De Biasi 2 : déf de la dérivation et propriété que les primitives de la fraction rationnelle nulle sont les constantes : application aux involutions en résolvant des EDO sur les séries formelles.

Deuxième partie

Analyse et Probabilités

201 - Espaces de fonctions : exemples et applications.

À rajouter : espace des fonctions linéaires continues

Questions : $\rightarrow$ Montrer que dans $H = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la topologie L^2 (pas complet), on n'a pas $\overline{F} \oplus F^\perp = H$. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}, \int_{\frac{1}{2}}^{1} f = 0\}$, alors $F^\perp = \{\lambda \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et ça marche.

$\rightarrow$ Soit $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[a,b]$ et g continue sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$.
Comme on a CVU, $\bigcup \mathrm{Im}(f_n) \subset K$ compact, donc on a le résultat.

$\rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, montrer que $\|f\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$.
On a déjà $\|f\|_{L^p} \leqslant |b-a|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}$. Puis pour tout $\epsilon > 0$, il existe I_ϵ tel que $f(x) \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \epsilon$ sur cet intervalle.
On a donc $\|f\|_{L^p} \geqslant |I_\epsilon|^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon)$.
On a

$$|I_\epsilon|^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon) \leqslant \|f\|_{L^p} \leqslant |b-a|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}.$$

D'où en passant à la limite en p,

$$\|f\|_{L^\infty} - \epsilon \leqslant \liminf_{p\rightarrow\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \limsup_{p\rightarrow\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

Comme c'est vrai pour tout ϵ, on a $\lim_{p\rightarrow\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$

Remarques : Il faut au minimum présenter les espaces de fonctions "plus ou moins régulières" et les L^p. On pourra s'intéresser aux fonctions holomorphes et aux espaces de Sobolev (avec la théorie des opérateurs).
On ne peut pas présenter l'espace de Schwartz et Fourier-Plancherel, car l'un trivialise l'autre...
C'est une leçon catalogue et franchement pas passionnante.

Références : Gourdon, *Analyse*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
Zuily, *Introduction aux distributions et équations aux dérivées partielles*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Chambert-Loir, Fermigier, Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*
Zavidovique, *Un max de maths*

I Espace de fonctions régulières

1 Espaces $\mathcal{C}^k(X)$ avec X compact

Hirsch, Lacombe : $\mathcal{C}(X)$ est un espace de Banach séparable, théorème de Stone-Weierstrass, application à la densité des fonctions lipschitziennes, théorème de Weierstrass.
Gourdon : application avec $\displaystyle\int f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$ (p 286).
Hirsch, Lacombe : déf équicontinue, Théorème d'Ascoli.
ZQ : application au théorème de Cauchy-Arzela-Peano.
ZQ : définition de $\mathcal{C}^k(X)$, norme quand X est compact, C'est un espace de Banach, pareil avec $\mathcal{C}^\infty$ en disant que c'est pas normable, on donne la distance.

2 Espace de Schwartz

Zuily : déf $\mathcal{S}$, $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$, il est métrisable et complet, déf TF, elle est linéaire, bijective, bicontinue, petites propriétés, calcul de la TF de $x \mapsto e^{-z|x|^2}$.

3 Espace des fonctions holomorphes

Amar, Matheron : déf fonction holomorphe, ex des séries entières, formule de Cauchy, analyticité, principe du prolongement analytique, thm de convergence de Weierstrass, application à ζ, théorème de Montel, topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$, réécriture de Montel.

II Espaces L^p

On se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, un corps $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera λ la mesure de Lebesgue.

1 Définition et structure des L^p

Briane, Pagès : déf de $\mathcal{L}^p$, ex de l^p, quotient, Hölder et Minkowski, structure de $\mathbb{K}$-evn, déf spéciale de L^∞. Inclusions entre L^p si la mesure est finie. Contre exemple dans $\mathbb{R}$ pour montrer qu'il n'y a aucune inclusion dans le cas général. Préciser que l'inclusion des L^p est une INCLUSION TOPOLOGIQUE. C'est le "contraire" pour les inclusions dans l^p.
Théorème de convergence L^p dominée, application à des petits calculs d'intégrales en exercice.
Application au théorème de Riesz-Fischer.

2 Analyse fonctionnelle dans les L^p

Brézis : théorème de Riesz, on donne l'isomorphisme isométrique entre $L^{p'}$ et $(L^p)'$. On en déduit que L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.
On précise les cas L^1, L^∞ qui ne sont pas réflexifs mais on connaît le dual de L^1.

Brézis : densité de $\mathbb{C}_c^\infty$ dans L^p pour $p \neq \infty$.
Chambert-Loir 1 : application : inégalité de Hardy
Brézis : autre application : L^p est séparable pour $p \neq \infty$ (en approchant avec les fonctions étagées à coefficients rationnels définies sur des pavés aux bords rationnels).
Préciser que L^∞ n'est pas séparable.
Zavidovique : se ramener à L^2 permet de prouver des merveilles : Théorème de Grothendieck

3 Le Hilbert L^2

Briane Pagès : c'est un Hilbert avec tel produit scalaire. On cite le théorème de Riesz sur L^2 et on précise que celui du dessus est prouvé en se ramenant au produit scalaire sur L^2.
On cite rapidement le théorème de projection et on dit que c'est utile : ex : moindres carrés. C'est un L^p important !
Hirsch, Lacombe : déf base hilbertienne, Bessel-Parseval, exemples, calcul de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$.
Amar, Matheron : Espace de Bergman

4 Convolution dans les L^p

Briane-Pagès : définition de la convolution pour les fonctions boréliennes positives. Cadre général d'existence avec inégalité de Young. L'espace $(L^1(\lambda^d), +, ., *)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative, mais ne possède pas d'unité. On peut ainsi parler des approximations de l'unité en précisant ce qu'une unité est. On peut montrer que le dirac n'est pas dans L^1. On parle ensuite de la régularisation par convolution (avec la dérivée qui n'agit que sur une partie de la convolution) et en corollaire de la densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p en convolant avec des suites régularisantes.

III Espaces de Sobolev

Brézis : déf H^1, produit scalaire, c'est un Hilbert séparable, représentant continu, injection continue de $H^1 \subset \mathcal{C}$, déf H_0^1, propriété d'annulation au bord, inégalité de Poincaré.
Problème du Laplacien, déf solution classique/faible, redonner Lax-Milgram, il existe une unique solution faible, donc une unique solution forte, généralisation à Dirichlet non-homogène.

202 - Exemples de parties denses et applications.

Questions : $\to$ Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}$ bornée contenant une infinité de termes distincts et $e_n : t \mapsto t^{a_n}$ pour $t \in [a,b]$. Montrer que les e_n sont denses dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$.
On n'est pas dans un Hilbert donc on ne peut pas appliquer le critère de densité avec l'orthogonal. Mais on peut appliquer la caractérisation avec la dualité.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})'$, tel que $\varphi(e_n) = 0$ pour tout n. On pose $g(z) = \phi(t \mapsto t^z)$ puis on trouve g holomorphe en calculant directement la dérivée avec une limite ou en développant en série entière. g s'annule sur un ensemble infini borné, donc sur un ensemble possédant un point d'accumulation. Donc $g = 0$, et $\phi = 0$ car $\mathrm{Vect}(t \to t^z)$ est dense.

$\to$ Soit l'espace mesuré $([0,1], \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P}$ mesure de proba de densité positive strictement f, X un ensemble de mesure pleine. Montrer que X est dense.
On a $\mathbb{P}(B(x,\epsilon) \cap X) = \displaystyle\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f > 0$ car $\mathbb{P}(X) = 1$ donc $B(x,\epsilon) \cap X \neq 0$.

$\to$ (X_n) famille de variables aléatoires iid dans $[0,1]$, on suppose que la loi de X_1 est à densité pp non nulle par rapport à λ. Montrer que pour presque tout ω la famille $(X_n(\omega))$ est dense dans $[0,1]$.
On a $\mathbb{P}(\forall n, X_n \notin B(x,\epsilon)) \leqslant \mathbb{P}(\forall n \leqslant N, X_n \notin B(x,\epsilon)) = \mathbb{P}(X_1 \notin B(x,\epsilon))^N \to 0$, car par l'exo précédent $\mathbb{P}(X_1 \notin B(x,\epsilon)) \neq 1$.

$\to$ Et si on enlève l'indépendance ?
On prend $X_n = X_1$ pour tout n, et ça ne marche plus, car $(X_n(\omega))$ est stationnaire...

$\to$ $\mathbb{P}(X_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}) = a_n$ tel que $\sum a_n$ converge. Montrer que presque surement, $X_n \to 1$.
Borel-Cantelli : $\mathbb{P}(\limsup\{X_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}\}) = 0$, puis on retraduit la $\limsup$ ensembliste avec les quantificateurs.

$\to$ $E = l^2(\mathbb{N})$, S est l'opérateur de décalage à gauche. Trouver S^*, puis montrer que $d(S, \mathrm{GL}) \geqslant 1$.
S^* est l'opérateur de décalage à droite avec 0 comme première coordonnée. C'est un inverse à droite de S.
Soit $G \in \mathrm{GL}$, si $\|S - G\| < 1$, on a $\|id - GS^*\| \geqslant \|S - G\| \underbrace{\|S^*\|}_{=1} < 1$. On en déduit que GS^* est inversible, donc que S^* est inversible, ce qui est absurde.

Remarques : Il faut un peu chercher partout pour cette leçon. Il y a plein de petits résultats, on est obligé d'en oublier.
Le jury demande de parler des exemples de bases (groupes additifs sur $\mathbb{R}$), mais encourage aussi à parler d'approximations par des polynômes ou de résolution d'équations aux dérivées partielles par séries de Fourier...
On demande des exemples, donc on va vite sur la première partie pour avoir de la place sur le reste !
Être dense dans un evn, c'est être présent dans toutes les boules !

Références :
Pommellet, *Cours d'analyse*
Gourdon, *Analyse*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Chambert-Loir, Fermigier, Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Analyse 1*

Rudin, *Analyse réelle et complexe*
Faraut, *Calcul intégral*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

Cadre : on se place sur des espaces métriques.

I Généralités

• Définitions

Pommellet : déf de l'adhérence, déf séquentielle, déf densité.
Sans référence : dans un evn, une partie est dense ssi elle intersecte toutes les boules ouvertes
Brézis : lemme de Baire

• Liens avec fonctions

Pommellet : si f et g coïncident sur une partie dense, elles sont égales, prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense.

• Séparabilité

Pommellet : déf, E séparable ssi il contient une base dénombrable d'ouverts.

II Parties denses en dimension finie

1 Parties denses sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Gourdon : exemples de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Pommellet : le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.
Sans référence : $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{C}$
Gourdon : sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, applications : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$, densité de $\sin(\mathbb{Z})$ (ou $\cos(\mathbb{Z})$ d'ailleurs).
Pommellet : l'ensemble $\{e^{2i\pi n\theta}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$

2 Parties denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

OA : densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Application : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
Gourdon : application : différentielle du déterminant.
OA : densité de $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, puis cas réel : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ fermé différent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cas complexe : $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Application : $\phi : D + N \mapsto D$ n'est pas continue, Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$.

III Parties denses en dimension infinie

1 Densité dans les L^p

Briane, Pagès : densité des fonctions en escalier à support compact, des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact si $p < \infty$. densité des fonctions étagées dans L^∞.
Chambert-Loir 1 : Inégalité de Hardy
Rudin, Faraut : transformée de Fourier-Plancherel
Briane, Pagès : séparabilité

2 Densité dans des espaces de Hilbert

OA : critère de densité dans un Hilbert avec l'orthogonal.
HL : on met le théorème de Riesz en application et à l'oral/en remarque, on dit que ça sert à prouver Lax-Milgram et à résoudre le pb de Dirichlet.
OA : application aux calculs de bases hilbertiennes, densité des polynômes orthogonaux.
Brézis : en remarque, Hahn-Banach donne le corollaire 1.8 qui stipule à peu près la même caractérisation pour un espace de Banach avec l'orthogonal pour la dualité.
Hirsch, Lacombe : exemples de bases hilbertiennes de polynômes sur L^2, un espace de Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne (ZORN !).
Un exemple fondamental de base hilbertienne : les e^{inx}.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman

3 Densité dans $\mathcal{C}^0$

Zuily, Queffelec : $\boxed{\boxed{\text{Théorème de Weierstrass}}}$.

Gourdon : application avec $\displaystyle\int f(t)t^n\mathrm{d}t = 0$ (p 286), théorème de Féjer, appli : toute fonction continue 2π périodique est limite uniforme de polynômes trigo.

ZQ : applications : $\boxed{\text{Résolution de l'équation de la chaleur}}$, densité des FCNPD, densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathcal{C}^0$.

203 - Utilisation de la notion de compacité.

Questions : → Démontrer l'inégalité de Poincaré.
Avec Rellich.

→ Soit M un sous espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, montrer que M est de dimension finie.
On pose $T : f \in M \mapsto f'$. Par le théorème du graphe fermé, on montre que T est continue.
Puis on pose $C = M \cap B(0,1)$, alors pour tout $f \in C$, par les accroissements finis, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\| \, |x-y| \leqslant \|T\| \, \|f\| \, |x-y| \leqslant \|T\| \, |x-y| \, .$$

C est équicontinue bornée donc par Ascoli, C est relativement compact, donc M est de dimension finie par Riesz.

→ Soit C un convexe compact d'un evn E, montrer que toute fonction f de C dans C 1-lipschitzienne a un point fixe.
Déjà on a pas unicité (exemple de l'identité).
Soit $z \in C$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}f(x)$. Alors f_n est bien à valeurs dans C par convexité, et un calcul simple montre que f_n est contractante donc admet un unique point fixe c_n.
Comme C est compact, on peut extraire de $(c_n)_n$ une sous-suite convergente (de limite c).
Alors en passant à la limite dans $c_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(c_{\varphi(n)}) = \frac{1}{\varphi(n)+1}z + \frac{\varphi(n)}{\varphi(n)+1}f(c_{\varphi(n)})$, on a $c = f(c)$.

Remarques : Rapport du jury : "Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité). Néanmoins, on attend des candidats une présentation synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue.
Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extremums mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie).
Les candidats solides peuvent aussi enrichir leur leçon par des exemples tels que l'étude des opérateurs à noyau continu.
Pour les candidats ambitieux, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales."
Ce serait une leçon si simple si il existait des bons bouquins de topologie...

Références : Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
Queffelec, *Topologie*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Chambert-Loir, *Analyse 1*

Cadre : On se donne (E,d) un espace métrique (la généralisation topologique est inutile - et dangeureuse - au niveau de l'agrégation : voir exemples moches Hauchecorne).

I Premières caractérisations de la compacité et utilisations

1 Caractérisation par la propriété de Borel-Lebesgue

Queffelec : déf avec Borel-Lebesgue (ne pas oublier la condition **séparé** !), réécriture avec les fermés, déf partie compacte, les quatre exemples/contre-exemples.
$A \subset E$ avec E compact est compacte ssi A est fermé, compact implique fermé, les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, ce ne sont pas que des segments : contre-exemple de l'ensemble de Cantor.
Stabilité par intersection quelconque et union finie (comme les fermés...).
Propriété des fermés emboîtés, théorème de Dini, application au théorème de Mercer.

2 Caractérisation séquentielle

Queffelec : propriété des fermés emboîtés, toute suite dans un compact a une valeur d'adhérence et si elle est unique alors la suite converge.
? : exemple de $\sin(n)$.
Pommellet : graphe fermé.
Déf précompacité, E compact ssi précompact et complet ssi toute suite a une ss suite convergente.
? : complet xor précompact n'implique pas compact : contre-exemples de L^2 ou de l'intervalle $]0,1[$.
Hirsch, Lacombe : extraction diagonale, théorème de Tychonoff dénombrable, homéomorphisme entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble de Cantor.
Queffelec : application : les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (et donc les compacts de $\mathbb{C}^n$ aussi) pour la norme produit !
Zuily, Queffelec : application à Banach-Alaoglu (à réécrire).

II Fonctions continues sur un compact

1 Compacité et extrema

Pommellet : $f(E)$ est compact, une bijection continue sur un compact est un homéomorphisme, une fonction sur un compact est bornée et atteint ses bornes, exemple de la distance.
Gourdon : application à l'équivalence des normes, corollaires, contre-exemples.
Rombaldi : application au TVI et à Rolle, ainsi qu'aux accroissements finis, application de tout ça (en remarque) au thm de Darboux, à l'évaluation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange, dans les méthodes de quadrature, les méthodes types Newton, ...
FGNal3 : $\boxed{\text{Ellipsoïde de John Loewner}}$.
Pommellet/Hirriart-Urruty : continue + coercive implique minorée et atteint son min, exemple des fonctionnelles quadratiques et dire qu'on cherche le min avec des méthodes de gradient, ex de la distance à un fermé, du polynôme de meilleure approximation et du théorème de D'Alembert Gauss.

2 Le théorème de Heine

Pommellet : le théorème de Heine, exemples des fonctions périodiques, ayant des limites à l'infini, densité des fonctions affines par morceaux.
Gourdon : deuxième théorème de Dini.

3 Théorèmes de point fixe

Rouvière : le théorème de point fixe affaibli sur un compact, exemple du sinus, théorème de Brouwer avec son prolongement (admis).
Chambert-Loir : $\boxed{\text{Théorème de Schauder}}$.

4 Théorème de Stone-Weierstrass

Hirsch-Lacombe : déf séparante, réticulée, thm de Stone-Weierstrass (admis), cas réel, exemple des fonctions lipschitziennes, polynomiales, déf auto-conjuguée, cas complexe, application au fait que la base de Fourier est une base topologique des fonctions 2π-périodique (et densité des polynômes trigonométriques dans le cas réel), donc une base hilbertienne de L^2, conséquence : toute la théorie des séries de Fourier (BWA !).

III Utilisations en dimension infinie

1 Quelques critères de compacité

Hirsch, Lacombe (à un endroit improbable encore) : théorème de Riesz. [1]
$\boxed{\text{Théorème d'Ascoli}}$.
Demailly : application à Cauchy-Arzela-Peano (en développement avec Schauder), ex de $y' = \sqrt{y}$.
Amar, Matheron/Saint Raymond : application au théorème de Montel (admis), l'exemple pas folichon avec la suite de fonctions convergeant uniformément vers 0, le théorème de Riemann (admis).

2 Opérateurs compacts

Hirsch, Lacombe : définition, reformulation du thm de Riesz, ex de l'opérateur à noyau, opérateurs de rang fini, le thm sur le spectre, l'exemple cool sur l'opérateur à noyau.

1. Au passage, c'est vraiment une honte de ne pas pouvoir trouver un seul bouquin listant simplement toutes les propriétés liées à la compacité ! Riesz est introuvable, et Montel a l'air d'être tombé dans l'oubli. Avis aux écrivains de bouquins d'agrégation, je veux bien un VRAI livre de topologie.

204 - Connexité. Exemples et applications.

Questions : $\to \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs, mais pas $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2$.
On a un quadrillage des chemins à suivre formé droites d'équation du type $x = a$ ou $y = b$ avec a, $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Attention à ne pas confondre avec $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2$ qui n'est pas connexe, car un espace produit est connexe ssi ses composantes sont toutes connexes. Ici ce n'est pas le cas car $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

$\to \mathbb{Q}$ connexe ? composantes connexes ?
Non car $\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \sqcup (]\sqrt{2}, \infty[\cap\mathbb{Q})$. Puis les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons (il est totalement discontinu), car les connexes de $\mathbb{Q}$ sont les connexes de $\mathbb{R}$ sous la topologie induite, donc l'intersection d'intervalles avec $\mathbb{Q}$.

$\to$ Détailler toutes les propriétés de connexités de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Utiliser le déterminant, puis se rappeler que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont homéomorphes.

$\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est-il connexe ?
aucune idée...

Remarques : Rapport du jury : "Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident."
Quasiment toutes les choses à mettre sont dans le Queffelec.
Attention ! On a l'impression que la connexité par arcs suffit à caractériser les connexes de $\mathbb{R}$ mais on ne peut l'utiliser, car pour montrer que la connexité par arcs implique la connexité, on utilise le fait que $[0, 1]$ est connexe...

Références : Queffelec, *Topologie*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique*
Zavidovique, *Un max de maths*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Cartan, *Cours de calcul différentiel*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 2*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*

Cadre : $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique. On note d la distance si on en a une.

I Généralités sur la connexité

1 Qu'est-ce qu'un espace/une partie connexe ?

Queffelec : les 4 définitions d'être connexe (en précisant qu'on peut remplacer $\mathbb{Z}$ par $\{0,1\}$), application, déf partie connexe, lemme de passage des douanes (dessin).

2 Stabilité ensembliste et topologique de la connexité

Queffelec : l'union de connexes est un connexe si leur intersection n'est pas vide, pareil pour les chaînes, contre exemple pour l'intersection, produit de connexes, si $A \subset B \subset \overline{A}$ et A connexe, alors B est connexe.
Gourdon : application à la caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$ (démo moins perchée que celle du Queffelec).
Queffelec : l'image d'un connexe par une application continue est connexe, application aux espaces non homéomorphes.
Gourdon : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
À l'oral, c'est contre intuitif : la bonne notion n'est pas l'homéomorphie, c'est l'homotopie.

II Composantes connexes, connexité par arcs, applications

1 Composantes connexes

Queffelec : la relation d'équivalence, déf composante connexe de X, d'un point, les propositions, exemples simples à inventer, déf totalement discontinu, ex des espaces discrets, de $\mathbb{Q}$ et de l'ensemble triadique de Cantor.
Un homéomorphisme échange les composantes connexes.
? : le théorème de Jordan (admis)

2 Connexité par arcs

Queffelec : déf chemin, déf connexe par arcs, dessin, connexe par arcs implique connexe et la réciproque est vrai sur un evn, exemple simple à inventer, de l'épigraphe, de l'hypographe, de la sphère unité, le contre exemple $(x, \sin(1/x))$ avec dessins, les convexes et les étoilés sont connexes par arcs.

3 Quelques exemples et applications aux groupes de matrices

On se place sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Mneimné, Testard : les ouverts connexes sont connexes par arcs, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe mais pas $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des projecteurs de rang fixé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe.
Zavidovique : Surjectivité de l'exponentielle en rappelant que $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[A]$.
Mneimné, Testard : déf groupe topologique, si H ss groupe de G alors H ouvert ssi $e \in \mathring{H}$, et alors H est fermé, application au fait qu'un groupe topologique connexe est engendré par tout voisinage de e, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est engendré par tout voisinage de I_n.
Queffelec : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.
H2G2 : $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple
Queffelec : décomposition polaire, application aux composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en disant bien qu'elles sont homéomorphes.
Mneimné, Testard : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe, les deux composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

III Applications de la connexité en analyse

1 Connexes et calcul différentiel

Queffelec/Cartan : si Df est nulle alors elle est constante sur chaque composante connexe (avec le théorème des accroissements finis sur les boules, que l'on généralise par connexité), un contre exemple bidon si on n'est pas sur un connexe (dessin).
Cartan/Demailly : Théorème de Cauchy-Lipschitz, contre-exemple si f n'est pas localement lipschitzienne.

2 Connexes en analyse réelle

Queffelec : application de la caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$: TVI, Brouwer en dim 1.
Gourdon : théorème de Darboux (dans les exos), ajouter l'application à $x^2 \sin(1/x)$ qui n'est pas $\mathcal{C}^1$ mais est dérivable.

3 Connexes en analyse complexe

Amar, Matheron : principe du prolongement analytique, application à l'unicité du prolongement de Γ, principe des zéros isolés, principe du maximum, corollaire sur les minima de $|f|$, application à D'Alembert-Gauss.
(Amar, Matheron/FGNan2 : indice d'un lacet par rapport à un point, comportement sur les composantes connexes, il est entier, application à une autre preuve de D'Alembert-Gauss.)

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

Remarques : Rapport du jury : "Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, mal maîtrisé par beaucoup de candidats, est un point important de cette leçon. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles.
On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est réservée aux candidats solides."

Références : Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
Queffelec, *Topologie*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Albert, *Topologie*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Faraut, *Calcul intégral*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*

I Généralités sur les espaces complets

1 Suites de Cauchy

Cadre : espace métrique.
Saint Raymond : déf suite de Cauchy, petites propriétés, la CVN.
Sans réf : exemple d'une suite tendant vers $\sqrt{2}$ qui est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, qui converge dans $\mathbb{R}$ mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

2 Espaces complets

Saint Raymond : déf espace complet, exemple de $\mathbb{R}$.
Pommellet : déf Banach, exemple des fonctions bornés de E dans F, construction du complété d'un espace métrique, déf équivalente avec la CVN.
Queffelec : exemple de $|.|$ et d_{arctan} sur $\mathbb{R}$ pour montrer que ce n'est pas une notion topologique !
Saint Raymond : théorème des fermés emboités avec dessin, un produit de complets est complet, ex de la complétude de $\mathbb{R}^n$.
Sans réf : on rajoute la complétude de $\mathbb{C}^n$ et de tout $\mathbb{K}$ evn de dim finie avec $\mathbb{K}$ complet.
Saint Raymond : fermé dans un complet, ex de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.
Queffelec : application au fait que les sev de dim finie d'un evn sont fermés.
Saint Raymond : (E, d) est compact ssi il est complet et précompact.

3 Exemples d'espaces complets

• Espaces de fonctions continues
Albert : continues de E dans F ou de K dans F sont des Banach, les linéaires continues aussi.
Saint, Raymond : les fonctions holomorphes et ce n'est pas un Banach !
• Espaces L^p
Briane, Pagès : la définition des L^p, leur structure d'espace vectoriel, le théorème de Riesz-Fischer.

II Théorèmes fondamentaux sur les espaces complets et applications

1 Théorème de prolongement

Saint Raymond : théorème de prolongement des applications uniformément continues.
Pommellet : application à la construction des intégrales de Riemann.
Faraut : application à la transformée de Fourier-Plancherel.

2 Théorèmes de point fixe

Rouvière : théorème de Picard, le même avec une itérée contractante, exemples/contre-exemples, en dim finie, on peut trouver le point fixe avec la méthode de Newton-Raphson ou la méthode de la sécante.
Demailly : Théorème de Cauchy-Lipschitz + rajouter le global.
Rouvière : théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites (Par Taylor), application à l'équation du pendule et au théorème des sous-variétés (en remarque).

3 Théorème de Baire

Gourdon : théorème de Baire dans les espaces métriques complets, un espace vectoriel à base dénombrable infinie n'est pas complet (ex : $\mathbb{R}[X]$).
ZQ : DFCNPD.
Gourdon : Banach Steinhaus en précisant l'ensemble Ω_k utilisé, application à l'existence d'une fonction différente de sa série de Fourier, en remarque : application en analyse fonctionnelle au thm de l'application ouverte, du graphe fermé, en théorie des opérateurs,...

III Espaces de Hilbert

1 Généralités et exemples

Hirsch, Lacombe : déf espace de Hilbert, ex de l^2, L^2, $\mathbb{R}^n$ et H^1.
Théorème de projection + application au critère de densité, forme du projecteur orthogonal, Gram-Schmidt.

OA : polynômes de meilleure approximation.
HL/Brézis : théorème de Riesz (application du critère de densité) + application à Lax-Milgram et résolution du problème de Dirichlet.

2 Bases hilbertiennes

HL : bases hilbertiennes, exemple de la base de Fourier.

Bayen, Margaria : la base hilbertienne de l'espace de Bergman

HL : Bessel-Parseval, exemple des séries de Fourier + théorème de Dirichlet.

206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Remarques : Rapport du jury : "Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses des théorèmes énoncés.
Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue.
Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.
Pour les candidats solides, il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius."

Références : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
Quarteroni, *Méthodes numériques*
Rappaz, Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*
Hirriart, Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Chambert-Loir, *Analyse 1*

I Quelques théorèmes de points fixes

1 Points fixes sur $\mathbb{R}$

Rombaldi : le TVI (à adapter), une fonction croissante de I dans I a un point fixe, contre-exemple, théorèmes liant points fixes et suites récurrentes, contre-exemples.

2 Le théorème de point fixe de Picard

Rouvière : le théorème (dire que c'est juste de la complétude), tous les contre-exemples avec graphes, l'exemple particulier des fonctions différentiables où on peut utiliser les accroissements finis, rajouter PLEIN d'exemples.
Le théorème avec une itérée contractante, avec des paramètres + exemple.

3 Théorèmes de point fixe avec hypothèse de compacité

Rouvière : le théorème de point fixe sur un compact, rajouter l'exemple de sin, le cas convexe compact, les contre-exemples de la rotation et de la translation.
Le théorème de Brouwer (admis), pour $n = 1$ c'est une application du TVI, pour $n = 2$ on fait le dessin et on dit comment faire à l'oral, le théorème avec homéomorphisme.
Chambert-Loir : Théorème de point fixe de Schauder.

II Application au calcul différentiel

1 Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, applications

Rouvière : théorème d'inversion locale en précisant la fonction sur laquelle on applique le point fixe.
applications : théorème de changement de variables, ex polaire, le lemme de Morse.
Objectif agrégation : racine k-ième d'une matrice.

Rouvière : théorème des fonctions implicites, il est équivalent au précédent, exemple de $x^2 + y^2 - 1$ + dessin, application au théorème des extrema liés, applications : inégalités arithmético-géométrique, emballage optimal, inégalité d'Hadamard.

Lafontaine : déf sous-variété de $\mathbb{R}^n$, théorème des sous-variétés, exemples liés.
Interprétation géométrique du lemme de Morse et du théorème des extrema liés.

2 Équations différentielles

Demailly : Théorème de Cauchy-Lipschitz, contre-exemple à l'unicité.
Rouvière : l'exemple du pendule.
Demailly : Cauchy-Lipschitz linéaire.
? : application au circuit RLC.

Saint Raymond : théorème de Cauchy-Arzela-Peano comme application de Schauder.
? : exemple de $y' = \sqrt{y}$.

III Points fixes en analyse numérique

1 Comment trouver rapidement un point fixe ?

Rouvière : la méthode numérique donnée par le théorème de Picard, critère d'attraction/répulsion/superattraction, dessins, contre-exemples si $|f'(a)| = 1$, application à l'approximation du nombre d'or.
Demailly : le passage de $f(x) = x$ à $g(x) = 0$, déf d'une méthode de descente càd trouver une direction de descente d_k et poser $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, méthode de Newton-Raphson + dessin en dim 1 (on créé artificiellement une superattraction).
Méthode de la sécante
C'est une méthode rapide mais elle requiert de savoir résoudre efficacement un système linéaire, donc faire un point fixe...

2 Résolution de systèmes linéaires

Positionnement du problème et lien avec le point fixe (faire un point fixe et résoudre $f(x) = 0$, c'est la même chose).
Rappaz, Picasso : la décomposition de A, l'algorithme, théorème de convergence + vitesse de décroissance de l'erreur, méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, les cas particuliers de convergence.
Quarteroni : on peut aussi prendre la formule de l'inverse $A^{-1} = \sum (I - A)^k$ et la tronquer pour obtenir une méthode calculant l'inverse. Si on la multiplie par b alors on a une méthode simple de résolution de systèmes linéaires. Elle converge de manière géométrique en $\rho(I - A)^k$ si $\rho(I - A) < 1$.

En fait on cherche juste à minimiser la fonctionnelle $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$. Attention, il faut $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$!
Hirriart, Urruty : $\boxed{\text{Méthode de gradient à pas optimal}}$, remarque sur la dépendance au conditionnement, dessin. Elle est plus lente mais les calculs internes sont simples dans ce cas.

207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

À rajouter : Rajouter des choses dans la première partie et dans l'interpolation.

Questions : $\to B$ boule unité de $\mathbb{R}^2$, $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue et f strictement négative sur $\partial\overline{B}$. On appelle $\hat{f}$ le prolongement de f par 0 sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $g(x) = \inf_{\|y\| \leqslant \alpha} \hat{f}(x+y)$. Montrer que g est continue sur B.

• Sur $B(0, 1-\alpha)$, f et $\hat{f}$ coïncident.
On a f uniformément continue, donc pour $\|x - x'\| < \eta$, $-\epsilon < f(x+y) - f(x'+y) < \epsilon$.
Donc $f(x+y) > f(x'+y) - \epsilon \geqslant g(x') - \epsilon$, d'où on en déduit $g(x) > g(x') - \epsilon$.
Par symétrie, on a $\|x - x'\| < \eta$, $|g(x) - g(x')| < \epsilon$.
• Si x ou x' n'est pas dans $B(0, 1-\alpha)$, on remarque que l'infimum de $\hat{f}(x+y)$ est atteint sur la boule fermée donc on peut adapter le cas précédent.

$\to$ équivalent de $\sum \frac{1}{n^t}$ pour $t \to 1^+$?
comparaison série intégrale, on trouve $\frac{1}{t-1}$

Remarques : C'est une leçon avec un thème nul, il faut aller chercher dans 10000 livres différents des petits morceaux non référencés dans l'index, donc typiquement une leçon dangereuse. La première chose à faire pour en oublier le moins possible est un brainstorming, la seconde, c'est d'aller voir à prolongement dans l'index du Rouvière pour retrouver les idées importantes.
Le jury nous dit que c'est une leçon très riche. Il demande à la fois qu'on s'attarde sur les exemples simples et qu'on parte vite sur des choses plus intéressantes : transformée de Fourier-Plancherel, prolongement analytique, Hahn-Banach (**en dimension finie !**), mais aussi l'étude des solutions maximales chez nos amies les équations différentielles.
On peut mettre un petit peu d'interpolation en le justifiant bien.

Références : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Chambert-Loir, Fermigier, Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Analyse 1*
Rudin, *Analyse réelle et complexe*
Faraut, *Calcul intégral*

I Aspects topologiques

1 Prolongement en un point

Rombaldi : déf du prolongement par continuité en un point, exemples juste après.

2 Prolongement par densité

Pommellet : prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense. Application : intégrale de Riemann des fonctions réglées.
Chambert-Loir 1 : Inégalité de Hardy
Rudin, Faraut : Transformée de Fourier-Plancherel

3 Prolongement sur des fermés

ZQ : théorème de Tietze + critère de compacité p 221

4 Théorème de Hahn-Banach

Rouvière : Hahn-Banach **en dimension finie**
Brézis : corollaires au dessous de Hahn-Banach

II Aspects différentiels

1 Prolongement dérivable d'applications

Pommellet : prolongement $\mathcal{C}^1$ avec contre exemple. Application à $e^{-\frac{1}{x^2}}$ et aux définitions des fonctions bosses et plateaux.
Rouvière : théorème de Borel + application

2 Équations différentielles

Demailly : Théorème de Cauchy-Lipschitz.
Pommellet : théorème de sortie de tout compact. Application aux équations autonomes vérifiant $y(t_1) = y(t_2)$, et, dans $\mathbb{R}$, aux applications constantes, puis à la solution de $y' = \sin(y)$ qui ne peut couper les graphes des solutions constantes.

III Aspects analytiques

1 Fonctions analytiques, prolongement analytique

OA (p 55) : prolongement holo d'une fonction analytique réelle, conséquence : les fonctions analytiques réelles sont les restrictions de fonctions analytiques complexes !

Pommellet : principe des zéros isolés, prolongement analytique (valables sur $\mathbb{R}$ aussi !).
OA : ex 2.2 : une application et le contre exemple $\sin(\frac{\pi}{1-z})$.
Calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne.
ZQ : prolongement analytique de Γ sur le demi plan $\{\Re(z) > 0\}$, et même sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

2 Problèmes de prolongement des séries entières

Gourdon : Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
Pommellet : déf point régulier/singulier, il y a toujours une singularité sur le bord du disque.
ZQ (p 51) : ça ne veut pas dire qu'on ne peut pas prolonger ! On a l'exemple de $\sum \frac{z^n}{n^2}$ dont la somme est définie sur le disque fermé et il y a un prolongement continu de cette série sur tout $\mathbb{C}$. Ce que l'on ne peut faire, c'est un prolongement **analytique**.

IV Interpolation

→ Méthodes pour créer des prolongements à partir de points connus.

Demailly : polynômes d'interpolation de Lagrange, formule d'erreur et corollaire, unicité et existence du polynôme de meilleure approximation uniforme.

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

À rajouter : remplir la dim finie

Questions : → Soit $(a_n)_n$ tel que $\forall (b_n)_n \in l^p$, on aît $\sum a_n b_n < \infty$. Montrer que $(a_n)_n \in l^q$.

Banach Steinhaus avec $T_n(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$

→ Trouver une forme linéaire non continue sur $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|.\|_\infty)$.

La dérivation en 0

→ Existe-t-il une forme linéaire non continue sur un Banach de dim infini ?

OUI, Zorn donne l'existence d'une base algébrique $(b_i)i$. On peut les supposer de norme 1 quitte à renormaliser. Alors $\phi : b_i \to i$ convient car non bornée.

Remarques : Ne pas trop parler de distances ou de théorèmes ne se prouvant qu'avec les propriétés de distance de la norme. On a une norme, il faut s'en servir !

Contrairement à ce qu'indique son nom, le théorème de Hahn-Banach n'a rien à voir avec les Banach...

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*

Pommellet, *Cours d'analyse*

Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*

Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*

Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Brézis, *Analyse fonctionnelle*

Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

Cadre : on note $(E, \|.\|)$ un evn, $\mathcal{L}(E,F)$ les applications linéaires de E vers F et $\mathcal{L}_c(E,F)$ les applications linéaires continues.

I Généralités

1 Espaces vectoriels normés

Gourdon : déf d'une norme, liens avec les distances, exemples d'evn : on met $\mathcal{C}(K,\mathbb{K})$ muni de la norme uniforme!!! La norme est 1-Lipschitz donc continue.
Pommellet : normes équivalentes, cela définit la même topologie. Une inégalité donne une inclusion topologique : ex : L^p avec mesure finie.
Sans référence : la réciproque est vraie : il y a inclusion topologique ssi on a l'inégalité de norme correspondante.
(Saint Raymond : l'exemple de l'evn quotient, préciser sa norme)

2 Applications linéaires continues

Gourdon : thm de continuité, l'addition et la multiplication externe sont linéaires continues si on fixe une des variables. Déf de $\mathcal{L}_c(E,F)$, de sa norme, exemples simples à inventer... Sous multiplicativité de la norme, $\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre munie de la composition
Formes linéaires continues : E' sous espace de E^*, f continue ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.
Pommellet : f continue ssi elle transforme toute suite de limite nulle en une suite bornée.
Hauchecorne : une application linéaire discontinue!
Sans référence : la différentielle en un point ?
Brézis : Théorème de Hahn-Banach analytique et application au prolongement d'applications continues.
Application : F sev de E, F dense dans E ssi toute forme linéaire s'annulant sur F est nulle sur E.

3 Balade topologique en dimension finie

Gourdon : toutes les normes sont équivalentes, les applications linéaires sont continues, tout sev de dim finie est fermé, les compacts sont les fermés bornés. Contre-exemples avec $\mathbb{R}[X]$. Théorème de Riesz
Hauchecorne : partie fermé borné non compacte en dim infinie.

II Espaces de Banach

1 Définition, premières propriétés

Gourdon : déf. En dim finie tout est complet. Tout sev à base dénombrable n'est pas complet.
Exemples dans Pommellet/Saint Raymond (Riesz Fischer dans Brézis)
Gourdon : si F Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ Banach, remarque sur la convergence normale, application à inverse de $(id-u)$.
Pommellet : on peut construire le complété d'un evn (vrai pour métrique), tout sous espace fermé d'un espace complet est complet.
Thm du point fixe de Picard, rajouter en application Cauchy-Lipschitz et Stampacchia.
Prolongement des applications uniformément continues sur un dense.

2 Applications du lemme de Baire dans un Banach

Gourdon : lemme de Baire
Application 1 : Banach Steinhaus avec ex de la question 1 au dessus.
Application 2 : théorème de l'application ouverte/du graphe fermé, théorème de Banach sur la continuité de l'inverse. Corollaire : $\mathrm{GL}(E)$ ouvert avec le résultat précédent sur la forme de $(id-u)^{-1}$.
Zavidovique/Rudin : Théorème de Grothendieck

III Espaces de Hilbert

1 Définition, premières propriétés

Saint Raymond : déf produit scalaire, normé définie par le ps, le ps est continu en tant que forme bilinéaire ou linéaire. Exemple de l^2 et L^2.

2 Théorème de projection

Saint Raymond : le thm, la caractérisation, la projection est 1-lipschitzienne.
Déf de l'orthogonal, $F^{\perp\perp} = F$ si F sev fermé, caractérisation de la densité d'une partie par l'orthogonal.
Théorème de Pythagore
Si F sev fermé, la projection est appelée projection orthogonale, est unique et est l'application linéaire continue importante de cette partie.
Puis théorème de Riesz et application à la définition de l'adjoint.

3 Bases hilbertiennes

OA : les bases hilbertiennes généralisent les bases algébriques en dimension finie.
Déf, théorème d'existence, caractérisation et exemples série de Fourier, polynômes de Hermite, Legendre... Utilisation des polynômes orthogonaux en approximation d'intégrale (Demailly).

Bayen, Margaria : Espace de Bergman

209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon comporte un certain nombre de classiques. Les polynômes d'interpolation de Lagrange, les polynômes de Bernstein sont des classiques tout comme le théorème général de Stone-Weierstrass.
En ce qui concerne le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, un candidat plus ambitieux pourra donner une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité), et éventuellement en montrer l'optimalité. Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Comme la leçon 202, elle permet aux candidats plus ambitieux d'aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier."

Références : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Faraut, *Calcul intégral*

Cadre : on tente d'approximer des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I Approximation par des polynômes

1 Approximation locale des fonctions régulières

Rombaldi : Taylor-Lagrange avec l'inégalité, quelques applications à des inégalités classiques, Taylor reste intégral, application à la convergence de séries entières, Taylor-Young.

2 Densité dans l'espace des fonctions continues

Hirsch, Lacombe : le théorème, le cas réel.
Zuily, Queffelec : $\boxed{\text{Théorème de Weierstrass}}$
Gourdon : application (introuvable) : si $\int f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$ pour tout n alors $f = 0$.

3 Densité dans L^2

Objectif agrégation : déf fonction poids, le produit scalaire, déf polynômes orthogonaux, exemples, polynôme de meilleur approximation, c'est juste une projection avec Gram-Schmidt, polynômes orthogonaux.
Demailly : application aux méthodes de Gauss, le théorème, l'exemple de Gauss-Tchebychev où tout est explicite.

II Interpolation polynomiale

1 Interpolation de Lagrange

Demailly : polynôme de Lagrange, c'est l'unique polynôme interpolateur de degré inférieur ou égal à n, formule d'erreur (avec Rolle), erreur dans le cas de la subdivision équirépartie.
Points d'interpolation de Tchebychev, ce sont les racines des polynômes de Tchebychev, la relation de récurrence les liant, la déf des points d'interpolation sur $[a, b]$, la nouvelle erreur, comparaison.
À l'oral : c'est difficile d'estimer $\|\pi_{n+1}\|$ et $\left\|f^{(n+1)}\right\|$

2 Convergence uniforme des polynômes d'interpolation

En remarque : on n'est même pas sur d'avoir convergence ponctuelle pour une fonction régulière donc bon...
Demailly : le cas analytique, contre exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$, dessin du phénomène de Runge, cas où f est lipschitzienne et où on prend les points d'interpolation de Tchebychev (admis).

3 Application aux formules de quadrature

Demailly : sur un petit intervalle, on approxime f par son polynôme d'interpolation de Lagrange, on obtient alors une méthode de quadrature.
Décomposition par Chasles, points équidistants de la méthode de Newton-Cotes, on se ramène à l'intégrale sur $[-1, 1]$.
écrire les différents polynômes d'interpolation de Lagrange et les méthodes de quadrature correspondantes, rappeler rapidement leurs ordres (on utilise d'ailleurs Taylor RI pour évaluer les erreurs).

III Approximation par des polynômes trigonométriques

1 Séries de Fourier, propriétés hilbertiennes

Faraut : déf série de Fourier, les coefficients, le mode de convergence particulier de la série, les (e_n) forment une base hilbertienne de L^2, formule de Parseval, application au calcul de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^4}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

2 Convergence uniforme

Faraut : les deux critères de CVU (le corollaire est formulé bizarrement), l'application/contre-exemple.

ZQ/Evans : $\boxed{\text{Équation de la chaleur}}$

Faraut : théorème de Fejer, Stone-Weierstrass avec les polynômes trigonométriques.

3 Convergence ponctuelle

Faraut : théorème de Dirichlet, le cas $\mathcal{C}^1$ par morceaux, des exemples en exercice.
Le phénomène de Gibbs, dessin.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Remarques : Rapport du jury : "Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gramm-Schmidt. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier,...). Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n \geqslant 0} (x, e_n) e_n$ et $\|x\|^2 = \sum_{n \geqslant 0} (x, e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille (e_n) et en justifiant la convergence.
La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.
Pour des candidats solides, le programme permet d'aborder la résolution, et l'approximation, de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert devrait être plus souvent explorée. Enfin, pour les plus valeureux, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé."
J'aime bien cette leçon... Il y a moyen de faire des merveilles !
Il faut bien penser à regarder le OA en même temps pour penser à tout ! On a vite fait d'oublier Gram-Schmidt.

Références : Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Evans, *Partial differential equations*
Zavidovique, *Un Max de Math*
Rudin, *Analyse Fonctionnelle*

Cadre : E un $\mathbb{K}$-ev (pas forcément de dim finie) avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Promenade dans les espaces de Hilbert

1 Espaces préhilbertiens et de Hilbert, exemples

HL : déf produit scalaire, déf espace préhilbertien (sous-entendu, il manque pas grand chose pour en faire un Hilbert), ex sur $\mathbb{R}^n$ où toute forme quadratique définie positive a une forme polaire qui est un produit scalaire et réciproquement, ex de $L^2(\mu)$ et spécification pour les cas où μ est la mesure de comptage et la mesure de Lebesgue, puis ex de $\mathcal{C}(K)$ muni du produit scalaire L^2.
Normes : le produit scalaire induit une norme, les deux formules permettant de retrouver le produit scalaire à partir de la norme, identité du parallélogramme +dessin, la norme provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'égalité du parallélogramme, Cauchy-Schwarz + cas d'égalité, application à la norme de $\phi_y = (y, .)$, $y \mapsto \phi_y$ est une isométrie.
Déf espace de Hilbert, tout ev préhilbertien de dim finie est un Hilbert, ex de L^2, de l^2, contre-exemple de $\mathcal{C}$ qui n'est pas complet pour la norme L^2 (ex de la suite $(x \mapsto x^n)_n$ sur $[0, 1]$.
Bayen, Margaria : exemple de l'espace de Bergman que l'on étudiera plus tard en développement.

2 Orthogonalité, familles orthogonales

HL : Orthogonalité : déf orthogonalité, orthogonal d'une partie avec la déf ensembliste et les noyaux, $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp$, Pythagore.
Déf famille orthogonale, liberté, famille orthonormale, ex de la base canonique dans $\mathbb{K}^n$, inégalité de Bessel.
Zavidovique/Rudin : Théorème de Grothendieck

3 Théorème de projection

HL : le théorème de projection sur un convexe fermé avec sa caractérisation et un dessin, dessin pour montrer que convexe est nécessaire à l'unicité (ex du complémentaire du disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$), la projection est 1-lipschitzienne, donc continue, projection sur un sev fermé, corollaire : $\overline{F} \oplus F^\perp = E$ + critère de densité génial.
OA : contre exemple sur l^2 à $F \oplus F^\perp = E$ quand F n'est pas fermé.
HL : Forme du projecteur orthogonal sur un sev de dim finie, application à l'algorithme de Gram-Schmidt.
OA : polynômes de meilleure approximation, un exemple si on a le temps de faire les calculs.

4 Théorème de Riesz et conséquences

HL : théorème de Riesz.
OA : prolongement explicite dans Hahn-Banach analytique, théorème de Radon-Nikodym.
HL : déf convergence faible, cv forte implique cv faible, contre-exemple dans l^2, petites propriétés, Banach-Alaoglu.

II Bases hilbertiennes, exemples et applications

1 Définition et exemples

On se place sur un espace de Hilbert séparable pour ne pas avoir à traiter des familles sommables (on parle de celles-ci juste à l'oral.).
HL : déf base hilbertienne, ex de la base canonique dans $\mathbb{K}^n$ dans l^2, conséquence de Gram-Schmidt : séparable ssi on a une base hilbertienne dénombrable.
Bayen, Margaria : la base (e_n) dans l'espace de Bergman.
OA : Avec Zorn, tout Hilbert a une base hilbertienne.
HL : Bessel-Parseval +conséquence sur le fait que tout Hilbert de dimension infinie est séparable ssi il est isométrique à l^2, décomposition de tout élément dans la base hilbertienne (expliquer le sens de cette limite à l'oral).

2 La base hilbertienne de Fourier

OA : déf des e_n, déf des coefficients de Fourier, déf noyau de Fejér, formule pour σ_N, théorème de Fejér (admis !), conséquences : $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne.
HL : application au fait que les polynômes de Tchebychev forment une base hilbertienne (dans les exos).

On peut décomposer toute fonction L^2 sur cette famille, formule de Parseval, application au calcul des $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ avec les dessins des fonctions considérées.
Théorème de Dirichlet (à l'oral : la série de Fourier converge pp mais c'est dur.)
Zuily, Queffelec/Evans : résolution de l'équation de la chaleur

3 Polynômes orthogonaux

OA : déf fonction poids, def polynôme orthogonal, existence et unicité d'une famille de polynômes orthogonaux.
HL : polynômes de Legendre, de Hermite, de Laguerre, de Tchebychev (vus avant).
OA : Densité des polynômes orthogonaux + contre-exemple, base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
Demailly : application aux méthodes de Gauss, le théorème où on précise les moyens d'obtenir les x_j et les λ_j, l'exemple de la formulation explicite de Gauss-Tchebychev. (voir Crouzeix-Mignot si on veut en mettre plus)

III Opérateurs linéaires continus sur un Hilbert

HL : avec Riesz, on peut définir l'adjoint d'un opérateur, propriétés basiques, ex du shift à gauche et à droite dans l^2, lim $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, déf rayon spectral, d'autres propriétés, déf rapide des valeurs propres/spectrales/résolvantes, du spectre, de l'ensemble résolvant.
Puis déf opérateur autoadjoint, exemple de l'opérateur à noyau, rayon spectral d'un autoadjoint, $\sigma(T) \subset [m, M]$, T est hermitien positif ssi $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$.
Enfin déf opérateur compact et spectre des opérateurs compacts, l'exemple suivant le théorème.
Spectre des opérateurs autoadjoints compacts (si on a la foi)

IV Le Hilbert H^1

Brézis : déf H^1, produit scalaire, c'est un Hilbert séparable, représentant continu, injection continue de $H^1 \subset \mathcal{C}$, déf H_0^1, propriété d'annulation au bord, inégalité de Poincaré.
Problème du Laplacien, déf solution classique/faible, théorème de Lax-Milgram (prouvé avec Riesz), il existe une unique solution faible, donc une unique solution forte, généralisation à Dirichlet non-homogène.
HL : si on a la foi, application de l'étude du spectre des opérateurs autoadjoints compacts aux valeurs propres du laplacien.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, $S = g^{-1}(0)$ connexe, $\forall x \in \Omega$, $Dg(x) \neq 0$
$\exists \lambda_x$ tel que $Df(x) = \lambda_x Dg(x)$
Montrer que f est constante sur S
$\forall a \in S$, $D_{x_1}g(a)$ est inversible et $g(a) = 0$ (on choisit par simplicité x_1 la variable pour laquelle $D_{x_1}g(a) \neq 0$).
Théorème des fonctions implicites :
V voisinage de (a_2, a_3)
W voisinage de a_1
$\phi : V \rightarrow W$ $\mathcal{C}^1$
$(a \in V \times W, g(a) = 0) \Leftrightarrow ((a_2, a_3) \in V$ et $a_1 = \phi(a_2, a_3))$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi(x_2,x_3),x_2,x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi(x_2,x_3),x_2,x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_2,x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi(x_2,x_3),x_2,x_3) \quad = -\lambda_x \frac{\partial g}{\partial x_2} + \lambda_x \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

De même, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(\phi(x_2,x_3),x_2,x_3) = 0$
Donc, on pose $h(.) = f(\phi(.), .)$.
Et on a : ∂h est nulle sur V. Ainsi, $h = h(a)$ sur V.
$S \cap (W \times V) = \{(\phi(x_2,x_3),x_2,x_3), x_2, x_3 \in V\}$
Donc $f_{|W \times V}$ est constante si et seulement si h est constante sur V, et c'est vérifié !
Soit $S' = \{s \in S, f(x) = f(a)\}$
Par définition $a \in S'$ et $S' \neq \varnothing$. Si $a' \in S'$, ce qui a été fait avec a s'applique et montre qu'il existe un voisinage $U_{a'} = W_{a'} \times V_{a'}$ de a' tel que $U_{a'} \subset S'$, c'est à dire que S' est ouvert. Par continuité de f, S' est fermé. S' est donc une partie ouverte et fermée du connexe S, donc $S' = S$. (*Tapé par Kévin Pilet*)

$\rightarrow$ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est bornée par $k < 1$. On pose $g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$. Montrer que g est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
On calcule la jacobienne, elle est inversible, puis on montre que g est injective avec l'inégalité des accroissements finis. Le théorème d'inversion globale donne que g est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur son image et que $\mathrm{Im}(g)$ est ouvert. On montre que $\mathrm{Im}(g)$ est fermé et non vide et on en déduit $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.

Remarques : Il faut savoir appliquer et prouver les deux grands théorèmes de cette leçon. C'est dur !
TIL : on se ramène en 0, puis on fait un théorème du point fixe sur l'application $\phi_y(x) = y + x - f(x)$.
TFI : on applique le TIL à $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$ et on bidouille. (voir Cartan)
Il vaut mieux présenter les trois développements, car sinon on n'a pas d'application du TFI.

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*
Zavidovique, *Un max de maths*

I Théorème d'inversion locale

1 Énoncés et exemples

Rouvière : le théorème d'inversion locale, l'exercice 63 donne un exemple et un contre exemple montrant que les hypothèses sont nécessaires. En remarque, ça marche en remplaçant $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, puis version holomorphe. Puis théorème d'inversion globale et retour sur le premier exemple.

2 Applications

Rouvière : théorème de changement de coordonnées, ex polaire.
l'exponentielle est un difféo local mais pas global. Au max on peut appliquer cette propriété sur la bande $|\operatorname{Im}(\lambda)|$.
OA : racine k-ième d'une matrice.
Zavidovique : image de l'exponentielle.

3 Deux applications en géométrie différentielle

Rouvière : 1) le lemme préliminaire puis $\boxed{\text{le lemme de Morse}}$. On dit qu'on va l'appliquer plus tard.
Lafontaine : 2) déf immersion et submersion, existence d'un inverse à gauche pour les immersions et d'un inverse à droite pour une submersion. Puis généralisation avec le théorème du rang constant !

II Théorème des fonctions implicites

1 Énoncés et exemples

Rouvière : énoncé du théorème, interprétation géométrique (avec dessin), version $\mathcal{C}^k$ et holomorphe en remarque. Exemple du cercle, dire que les points où la pente est infinie posent problème.
Etude de la différentielle de ϕ, retour sur l'exemple du cercle.
OA : la régularité de ϕ est la même que celle de f. On peut ainsi obtenir un DL de ϕ ! Puis on fait remarquer que le TIL et le TFI s'équivalent. (IMPORTANT !!!)

2 Quelques applications

Rouvière : résolution approchée d'une équation (ex 78), méthode + exemples.
Lien entre équa diff et fonctions implicites : ex 84 sur une autre démo du TFI, équation de Burgers avec méthode.
OA : régularité des racines simples d'un polynôme (plus simple qu'avec les relations coefficients racines), l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert.

3 Le théorème des extrema liés

Gourdon : $\boxed{\text{théorème des extrema liés}}$, application à la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.
Rouvière : application à l'emballage optimal d'une boite.
OA : en application, la preuve du thm spectral
Rouvière : inégalité d'Hadamard (sympa !)

III Liens avec les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1 Définitions des sous-variétés

Lafontaine : définition d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et théorème des sous-variétés. On précise que $(ii) \Rightarrow (iv)$ est le théorème des fonctions implicites et qu'on utilise le TIL dans la preuve.
Exemples correspondants aux équivalences : sphère, tore et le graphe d'une fonction continue (sin par exemple).

2 Espace tangent

Lafontaine : déf de vecteur tangent et espace tangent, interprétation comme le noyau de $Dg(a)$.
OA : interprétation géométrique du théorème des extrema liés.
Rouvière : Application du lemme de Morse à la localisation de surfaces par rapport à leur plans tangents (109,111).

3 Quelques exemples importants

Rouvière (ex 95) : l'ensemble des matrices de rang donné r est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - (n-r)^2$.
H2G2 : un ouvert est une sous-variété de dimension n : exemple de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2. Plan tangent : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
MT : déf de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_G$

Gonnord-Tosel : Théorème de Cartan Van Neumann

Application : SL_n, SO_n et O_n sont des sous variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.
MT : $\exp(\mathcal{L}_G)$ engendre G, l'espace tangent à I_n est $\mathcal{L}_G$, application aux espaces tangents de SL_n, SO_n et O_n.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Remarques : J'ai mis beaucoup trop de choses dans cette leçon. On peut en enlever à souhait.

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Cartan, *Cours de calcul différentiel*
Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Allaire, *Analyse numérique et optimisation*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

Cadre : $E = \mathbb{R}^n$, F est un $\mathbb{R}$ evn de dimension finie.

I Généralités sur la différentiabilité

1 Applications différentiables

Rouvière : déf différentiabilité, l'unicité de la différentielle, on la note $Df(a)$, exemple dans $\mathbb{R}$,la différentielle est une tangente + dessin, différentiabilité d'une fonction dans $\mathbb{R}^p$, différentielle de la somme et de la composée (rajouter le produit), classe $\mathcal{C}^1$, difféomorphismes, différentielles des formes n-linéaires, de l'inverse et de l'exponentielle matriciels.

2 Dérivées partielles

Rouvière : les dérivées partielles, le contre exemple, f est $\mathcal{C}^1$ ssi elle a des dérivées partielles continues, la jacobienne, compatibilité avec la composée, application : différentielle de $f(x, -x)$, de $f(y, x)$, du déterminant.

3 Inégalité des accroissements finis

Rouvière : l'égalité des accroissements finis sur $\mathbb{R}$.
Cartan : l'inégalité forte des accroissements finis sur $\mathbb{R}^n$.
Rouvière : corollaires : si la différentielle est bornée, on est lipschitzien, et si elle est nulle, on est constant sur les composantes connexes.
Applications : différentielle d'une limite, application à l'exponentielle, théorème de dérivabilité sous l'intégrale, théorème de Lyapounov...

4 Formules de Taylor

Rouvière : applications k fois différentiables, classe $\mathcal{C}^k$, ce sont des fonctions k-linéaires.
Rombaldi : Taylor-Lagrange avec l'inégalité, quelques applications à des inégalités classiques, Taylor reste intégral, application à la convergence de séries entières, Taylor-Young.

II Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, applications

1 Le théorème d'inversion locale

Rouvière : le théorème d'inversion locale, l'exercice 63 donne un exemple et un contre exemple montrant que les hypothèses sont nécessaires. En remarque, ça marche en remplaçant $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$. Puis théorème d'inversion globale et retour sur le premier exemple.
Application : théorème de changement de coordonnées, ex polaire.
l'exponentielle est un difféomorphisme local mais pas global, le lemme préliminaire du lemme de Morse.
Application : $\boxed{\text{le lemme de Morse}}$, application à la position d'un graphe d'une fonction par rapport à son plan tangent.

2 Le théorème des fonctions implicites

Rouvière : énoncé du théorème, interprétation géométrique (avec dessin), version $\mathcal{C}^k$ en remarque. Exemple du cercle, dire que les points où la pente est infinie posent problème.
Puis on fait remarquer que le TIL et le TFI s'équivalent.
Application : résolution approchée d'une équation (ex 78), méthode + exemples.

3 Application aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, exemples

Lafontaine : définition d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et théorème des sous-variétés. On précise que $(ii) \Rightarrow (iv)$ est le théorème des fonctions implicites et qu'on utilise le TIL dans la preuve.
Exemples correspondants aux équivalences : sphère, tore et le graphe d'une fonction continue (sin par exemple).
Déf espace tangent.

Exemples des sous-variétés de matrices :
H2G2 : un ouvert est une sous-variété de dimension n : exemple de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2. Plan tangent :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
MT : déf de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_G$

Gonnord-Tosel : Théorème de Cartan Von Neumann

Application : SL_n, SO_n et O_n sont des sous variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.
MT : l'espace tangent à I_n est $\mathcal{L}_G$, application aux espaces tangents de SL_n, SO_n et O_n.

III Optimisation

1 Différentielles et extréma, cas sans contraintes

Rouvière : l'isométrie canonique pour voir la dérivée seconde comme une application bilinéaire, théorème de Schwarz, contre-exemple, la matrice hessienne, elle est symétrique.
Les conditions d'extremum du premier et deuxième ordre, exemples, contre-exemples, la réécriture des conditions du deuxième ordre dans le cas de $\mathbb{R}^2$, l'interprétation géométrique avec Morse, dessins.

2 Conditions d'optimalité sous contraintes

Gourdon : théorème des extrema liés, interprétation géométrique, application à la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.
Rouvière : application à l'emballage optimal d'une boite.
OA : en application, la preuve du thm spectral
Rouvière : inégalité d'Hadamard (sympa !)

3 Méthodes de gradient

Pour trouver le minimum, on descend suivant la différentielle.
Allaire : gradient à pas fixe + convergence.
Hirriart-Urruty : lemme de Kantorovitch, Méthode de gradient à pas optimal + dessin.

217 - Sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

Questions : $\to$ Donner une fonction $\mathcal{C}^1$ et bijective qui n'est pas un difféomorphisme.
$x \mapsto x^3$ car la différentielle s'annule en un point.

$\to$ L'exponentielle est elle un difféomorphisme global entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? Non, elle n'est pas surjective car $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M)) > 0$. D'autre part, elle n'est pas injective car $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp(0)$.

$\to$ Soit v champ de vecteurs tangent à M une sous variété. On se donne $x(t)$ la solution de $x' = v(x)$ et $x(0) = x_0 \in M$. Montrer que x reste sur la sous-variété.
Pour cela on note par l'absurde t_0 le temps de sortie de M, puis pour $t > t_0$, $x(t) = \underbrace{x(t_0)}_{\in M} + \int_{t_0}^t \underbrace{v(x(s))}_{\in M} \mathrm{d}s$ car v est tangent à M.

$\to$ Si il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global G entre deux sous-variétés M et M', montrer qu'elles sont de même dimension.
Soit $y \in M'$, on pose $x = G^{-1}(y)$. On prend F $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local envoyant un voisinage U de $x \in M$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On a $F(U \cap M) = F(U) \cap \mathbb{R}^d$ avec d la dimension de M. Alors $F \circ G^{-1}$ envoie bien un voisinage V de y sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et on a $F \circ G^{-1}(V \cap M') = F \circ G^{-1}(V) \cap \mathbb{R}^d$.

$\to$ On se donne deux cartes locales φ et ψ d'un voisinage U autour d'un point de M sur une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut définir une notion de mesure nulle sur une sous-variété.
On note $A = U \cap M$ et λ la mesure de Lebesgue. Si $\lambda(\varphi(A)) = 0$, alors

$$0 = \lambda(\psi(A)) = \int_{\psi(A)} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\varphi(A)} \left|\mathrm{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1})\right| \mathrm{d}\lambda(y)$$

par changement de variables (car on a des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes). Donc comme $\left|\mathrm{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1})\right| > 0$, nécessairement on a $\lambda(\psi(A)) = 0$.

$\to$ On se donne un ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ et le point $x_0 = (2, 0, 0)$. Celui-ci n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont l'espace tangent passe par x_0 est une sous-variété de dimension 1.
Il suffit de calculer et on trouve une sous-variété déterminée par $2y^2 + 3z^2 = 1$. C'est en fait une application simple d'un théorème beaucoup plus général.

Remarques : Il vaut mieux ne pas aller trop dans l'abstrait, rester aux bases concrètes c'est suffisant.
Il faut mettre plein de dessins !
Les groupes classiques sont des exemples utiles de sous-variétés !
Attention, on parle ici de sous-variétés DIFFÉRENTIELLES et pas de "le sous-variété topologique".
Attention, dans la définition paramétrique, on ne peut remplacer l'homéomorphisme par f injective. On a l'impression que cela enlève les points doubles et que du coup tout va bien mais c'est faux ! Par exemple, on peut prendre une courbe qui dessine un ρ mais qui coupe l'arc principal à l'infini. Ainsi, on n'a pas de point double mais ce n'est pas une sous-variété.
Si on a une paramétrisation globale de notre sous-variété (cercle), ça ne veut pas dire qu'on a un difféomorphisme global de notre sous-variété vers un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (le cercle n'est pas homéomorphe à un segment.).

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
Avez, *Calcul différentiel*

Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
Berger, Gostiaux, *Géométrie différentielle - variétés, courbes et surfaces*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
Gonnord, Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*
Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématique pour l'agrégation - Analyse 3*

I Sous-variétés, définitions et exemples

1 Qu'est-ce qu'une sous variété de $\mathbb{R}^n$?

• Introduction :
Rouvière : l'homme de la rue comprend très bien les mots courbe ou surface, mais ces notions sont difficiles à définir et réfèrent à des objets très variés. exemple de la parabole et de l'ellipse.
Puis dire qu'on a l'impression qu'une courbe est comme un ev de dimension 1, mais ça n'est pas le cas !

• Rouvière : déf lisse puis sous variété différentielle de $\mathbb{R}^n$. exemple du difféomorphisme local de la parabole, dessin de la parabole envoyé sur un segment localement. Déf d'une courbe lisse, d'une surface lisse, d'une hypersurface lisse. Exemples.

2 Théorème des sous-variétés

Lafontaine : théorème des sous-variétés, on précise que $2 \Rightarrow 4$ est le théorème des fonctions implicites et que le résultat de base utilisé est le théorème d'inversion locale.
On met les exemples correspondants à chaque propriété : implicite/sphère, paramétrique/tore puis le graphe d'une fonction continue (ex sin).

3 Qu'est-ce qui n'est pas une sous-variété ?

Rouvière (exo 88) : Le graphe d'une fonction pas lisse n'est pas une sous variété (carac 4) : ex $|x|$.
Ou pour une définition implicite (carac 2), une courbe pas lisse : $y^2 - x^3$.
Le point double, ex : $x^2 - y^2$, folium de Descartes
passage de dim 2 à 0 : le cône
Dessins !

II Espaces tangents

1 Définition

Lafontaine : déf vecteur tangent, espace tangent, prop : c'est un espace *affine* de dimension p. contre exemple de $x^2 - y^3 = 0$.
Rouvière : thm l'espace tangent est le noyau (implicite), l'image (paramétrique), le graphe (graphe). (si immersion, on regarde l'image, si submersion, on regarde le noyau, si graphe, ... graphe !)
(Sans référence : exemple : cercle en $(0, 1)$, on calcule le plan tangent avec $x^2+y^2-1 = 0$, avec $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, et $y = \sqrt{1 - x^2}$.)

2 Position d'une surface par rapport à son plan tangent

Lafontaine : équation du plan tangent d'une surface de $\mathbb{R}^3$ selon les différentes définitions de la surface.
Rouvière : le lemme de Morse.
Lafontaine : position de la surface par rapport au plan tangent + dessin.

3 Extréma sur une variété

Avez : théorème des extrema liés
OA : interprétation par rapport au plan tangent, dessin sur une ellipse.
Avez : multiplicateurs de Lagrange, application au théorème spectral.
Rouvière (ex 128) : Application : inégalité arithmético-géométrique forte.
(ex 129) Directions principales d'une quadrique : on cherche les axes les plus longs et les plus courts sur un ellipsoïde.
En remarque, le lemme de Morse donne aussi les extrema si la signature est $(n, 0)$ ou $(0, n)$.

III Quelques exemples fondamentaux de sous-variétés

1 Sous-variétés de dimension 1

Berger Gostiaux : à l'oral : intro du chapitre 8 sur ce qu'est une courbe. On étend la déf des sous-variétés pour accepter les points doubles. C'est à dire qu'on garde le côté immersion (qui nous évite les points de rebroussements type (t^2, t^3)) mais on enlève l'homéomorphisme.

à l'écrit :
théorie locale : définition de arc paramétré, $f(I)$ n'est pas une sous-variété en général même si f injective + exemple avec le symbole infini, arc géométrique.
forme de l'espace tangent, indépendance vis à vis de la paramétrisation choisie.
l.a. paramétrisation, exemple du cercle, remarque : c'est impossible à calculer en général, longueur d'arc, exemple ellipse.
déf courbure, formule pour une paramétrisation quelconque + calcul pour l'ellipse et le cercle.

théorie globale : CL3 : théorème des 4 sommets, classification des sous-variétés de dimension 1.
BG : inégalité isopérimétrique.

2 Sous-variétés de matrices

Rouvière (ex 95) : l'ensemble des matrices de rang donné r est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - (n-r)^2$.
H2G2 : un ouvert est une sous-variété de dimension n : exemple de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2. Plan tangent : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
MT : déf de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_G$
Gonnord-Tosel : Théorème de Cartan Von Neumann
Application : SL_n, SO_n et O_n sont des sous variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.
MT : $\exp(\mathcal{L}_G)$ engendre G, l'espace tangent à I_n est $\mathcal{L}_G$, application aux espaces tangents de SL_n, SO_n et O_n.
H2G2 : une autre sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: le groupe fermé $\mathrm{O}(p,q)$

218 - Applications des formules de Taylor.

Remarques : rapport du jury : "Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent.
De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue.
Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (par exemple le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $\left\|f^{(k)}\right\| \leqslant 2^{k(n-k)/2} \|f\|^{1-k/n} \left\|f^{(n)}\right\|^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements."

Références : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Cartan, *Calcul différentiel*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Crouzeix, Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
Ouvrard, *Probabilités 2*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*

Cadre : E, F deux $\mathbb{R}$-evn de dimensions finies

I Les différentes formules de Taylor

Rombaldi : théorème de Rolle, application à l'égalité de Taylor-Lagrange, si $n = 1$, c'est l'égalité des accroissements finis, puis Taylor reste intégral.
Cartan : déf $v(t) = f(a + th)$, application à la formule générale de Taylor reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, Taylor-Young.
? : formule de Taylor pour les polynômes.
Si il manque des formules en multi-d, on peut les trouver dans le Gourdon.

II Étude locale de fonctions

1 Développements limités

Rombaldi : déf développement limité, unicité, application aux fonctions polynomiales, exemples, le théorème liant la dérivabilité et l'existence de DL, contre-exemple.

2 Étude des extrema

Rouvière : les conditions d'ordre 1 et 2 pour avoir un extremum local, contre-exemples et exemples, la réécriture des conditions du deuxième ordre dans le cas de $\mathbb{R}^2$, dessins.
On précise le lien entre les conditions et la convexité (stricte/forte) de la fonction.
Le lemme préliminaire à Morse, le théorème d'inversion locale.
Lemme de Morse + dessins.

3 Étude asymptotique

Rouvière : méthode de Laplace, application à la formule de Stirling.

III Étude globale

1 Des inégalités

Rombaldi : les petites inégalités sympas.

2 Développement en série entière

Gourdon : le DSE d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est possible ssi le reste intégral tend vers 0, le contre exemple de $e^{-1/x}$, pleins d'exemples.
Zuily, Queffelec : théorème de Bernstein, théorème de Borel.

IV Applications en analyse numérique

1 Intégration numérique

Demailly : déf méthodes de quadrature composées (avec Chasles), exemples, déf ordre, déf erreur, théorème de Peano sur l'erreur (utilise Taylor !), les corollaires, quelques exemples d'erreurs.
On fait pareil avec les méthodes de Gauss selon la place.

2 Recherche de points fixes

Rouvière : attraction/répulsion/superattraction de points fixes, exemples, le théorème de Picard donne une méthode numérique simple.
La méthode de Newton sur $\mathbb{R}$.
Demailly : méthode de la sécante, la méthode en dimension finie supérieure.

3 Analyse de schémas numériques

Crouzeix, Mignot : déf consistance, ordre, stabilité, convergence, la méthode pour construire une méthode d'ordre p, application aux méthodes d'Euler, de Runge Kutta (qui provient d'une formule de quadrature au passage).

Étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur.

V Applications en probabilités

Ouvrard : Le TCL.
Cadre, Vial : application à la recherche d'un intervalle de confiance.
Barbe, Ledoux : la fonction caractéristique, critère de dérivabilité, critère d'analyticité, théorème des moments, pareil pour la transformée de Laplace.

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Questions : $\to$ On se donne $X = [a, b]$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X convergeant uniformément vers f (continue du coup), et $x_0 \in \mathring{X}$ un minimum strict de f. Quitte à restreindre X, on peut supposer que celui-ci est global. Existe-t-il une suite de points de minima $(x_n)_n$ des f_n convergeant vers x_0 ?
Oui. On prend une telle suite. Comme on est sur un compact, on en extrait une sous-suite convergente (de limite x_∞). Si on montre que $x_\infty = x_0$, on aura terminé car on aura une suite sur un compact avec une unique valeur d'adhérence.
Or $\forall n$, $f_n(x_n) \leqslant f_n(x_0)$, donc en passant à la limite, on a $f(x_\infty) \leqslant f(x_0)$, d'où $x_\infty = x_0$.

$\to$ Soit f convexe sur $I =]\alpha, \beta[$, f a un maximum dans I. Montrer que f est constante.
Soit x_0 un point de maximum (global du coup), on pose η un réel positif tel que $a = x_0 - \eta$ et $b = x_0 + \eta$ soient dans I. Alors par convexité, on a

$$f(x_0) = f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2} \leqslant f(x_0).$$

Du coup, pour tout η, on a f constante sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, donc sur I.

Remarques : Rapport du jury : "Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon. L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, ... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachées. Enfin, les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extremums liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore, des algorithmes peuvent être présentés et analysés.
Ici on va suivre le plan donné par le objectif agrégation et le Rouvière.
On peut surement remplacer le HUL par le Allaire en pratique, mais je ne l'ai trouvé que trop tard.

Références : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Hiriart-Urruty, Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I*
Allaire, *Analyse numérique et optimisation*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Avez, *Calcul différentiel*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

Cadre : E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f : E \to \mathbb{R}$, on veut minimiser f sur $C \subset E$. On dit que quitte à étudier $-f$, on peut regarder seulement les minima.

I Existence et unicité d'un minimum

Rouvière : déf extremum local/local strict/ global.
Allaire : ce n'est pas inutile : ex de non-existence sur l_2.

1 Compacité et coercivité

OA : une fonction continue sur un compact atteint ses bornes.
Rouvière : déf coercivité, coercif +continue sur un compact = atteint son minimum, l'exercice du point de Fermat en disant juste qu'il existe un minimum et en mettant le dessin en annexe.
? : application au fait que les normes sont équivalentes en dimension finie.

2 Convexité

HUL : déf convexité/stricte convexité/forte convexité en dimension quelconque+dessins, ex de $x \mapsto (Ax, x)$ fortement convexe si A définie positive, et seulement convexe si A symétrique positive, ex des normes classiques de $\mathbb{R}^2$, ex de l'exponentielle qui est strictement convexe sans être fortement convexe.
Allaire : si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.
Rouvière : retour au point de Fermat en disant que le min est unique car f est strictement convexe (car la norme euclidienne l'est).
FGNal3 : stricte log-concavité du déterminant, $\boxed{\text{Ellipsoïde de John-Loewner}}$.

3 Extremum sur un Hilbert

Brézis : théorème de projection sur un convexe fermé (minimise la distance), caractérisation, Stampacchia (on minimise une certaine fonctionnelle), Lax-Milgram, application au problème de Dirichlet pour le laplacien dans H_0^1.
Rouvière : moindres carrés en exemple, expliciter les équations déterminant le projeté (dans la variante), rajouter la version L^2.

4 Extremum d'une fonction holomorphe

Juste pour cette sous-partie, on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f est holomorphe.
Amar Matheron : propriété de la moyenne, les fonctions holomorphes le vérifie, principe du maximum local et global, le corollaire sur $|f|$, théorème de D'Alembert-Gauss.

II Caractérisation et propriétés d'un extremum local

1 Conditions d'optimalité sans contraintes

- Ordre 1 :

OA : condition du premier ordre, déf point critique, contre-exemple x^3, théorèmes de Rolle (+ ex 2 p 318 du Gourdon) et Darboux (rappel : l'intérêt de Darboux est que la fonction est dérivable non $\mathcal{C}^1$) pour chercher les points critiques.

- Ordre 2 :

OA : conditions du second ordre, contre-exemples $x^2 - y^3$ et $x^2 + y^4$. On rajoute que ces conditions correspondent à la forte convexité de f !
Rouvière : lemme de Morse avec interprétation géométrique pour dire que si la hessienne est non dégénérée, alors pour avoir un minimum, il faut nécessairement être de signature $(n, 0)$.
On peut rajouter en exemple les conditions classiques du type $rt - s^2$...

2 Conditions d'optimalité sous contraintes

• Contraintes convexes :
Allaire : inéquation d'Euler, cas de l'équation d'Euler qui nous ramène aux cas précédents, exemple de J la fonctionnelle de l'équation de Dirichlet, conditions du deuxième ordre.

• Contraintes générales :
Allaire : cône des directions admissibles, cas général des inéquations d'Euler.
$\rightarrow$ Si K est du type $F^{-1}(0)$:
Avez : extrema liés.
OA : interprétation par rapport au plan tangent, dessin sur une ellipse.
Avez : multiplicateurs de Lagrange, application au théorème spectral.
Rouvière (ex 128) : Application : inégalité arithmético-géométrique forte.
(ex 129) Directions principales d'une quadrique : on cherche les axes les plus longs et les plus courts sur un ellipsoïde.

$\rightarrow$ Si K est défini par des inégalités, on précise à l'oral qu'il y a des conditions de qualification des contraintes et un théorème du type extrema liés. Mais on ne le fait pas.

III Recherche numérique

On utilise ici des méthodes de descente. On précise ce que c'est (voir HUL chapitre 2). Il faut retenir que le bon cadre pour la convergence de ces algorithmes est la convexité au minimum.

1 Méthodes newtoniennes

Allaire : Newton+convergence, préciser à l'oral que l'on n'inverse pas la hessienne ! ! ! On résout un système du type $AX = b$ (voir Ciarlet pour des détails sur ce genre de problème).
Demailly : comme calculer la dérivée c'est moche, méthode de la sécante en dimension 1. Allaire donne d'autres méthodes approximant la Hessienne en dimensions supérieures (méthodes dites de quasi-Newton).
HUL : dire que en étant proche du minimum, on a souvent $\nabla^2 f$ définie positive et donc on a la méthode de descente avec $d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1}.\nabla f(x_k)$ (qui minimise une certaine fonction..., qualités et défauts de cette méthode (rapide mais trop de calculs pour calculer puis inverser la hessienne).

2 Méthodes de gradient

HUL/OA : on présente le contraire ici : une méthode lente mais qui prend moins de mémoire, algorithme de la méthode de gradient conjugué.
On choisit $d_k = -\nabla f(x_k)$.
Hirriart-Urruty : Méthode de gradient à pas optimal.
Allaire : gradient à pas fixe + convergence.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Remarques : Rapport du jury : "C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires.
Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.
Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase.
Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions."

Références : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 4*
Crouzeix, Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
Chambert-Loir, *Analyse 1*

I Étude générale des équations différentielles

1 Existence et unicité des solutions

Demailly : définir le problème de Cauchy, déf solution maximale, globale, formulation intégrale, comment transformer un système différentiel d'ordre p en système d'ordre 1.
Chambert-Loir : Théorèmes de Schauder et Cauchy-Peano-Arzela, exemple de non-unicité.
Demailly : déf local/global lipschitz par rapport à la seconde variable.
Théorème de Cauchy-Lipschitz, le global.
? : plein d'exemples : $Y' = AY$, $y' = y^2$, $y' = y^2 + a(t)$.
le contre-exemple : $y' = 3\,|y|^{2/3}$.

2 Passer du local au global

Demailly : lemme de Gronwall (à l'oral : il sert pour l'unicité de Cauchy-Lipschitz mais en pratique on s'en sert avec le théorème à venir, donc je le mets ici.).
Zuily-Queffelec : principe de majoration a priori, quelques sous-critères, exemples simples.
? : on pense à mettre l'exemple $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ avec A, B continues.

II Quelques équations différentielles particulières

1 Équations différentielles linéaires

Gourdon : on rappelle Cauchy-Lipschitz linéaire à l'oral, structure de l'espace des solutions.
Demailly : solution générale avec l'exponentielle pour le cas coefficients constants, méthode des caractéristiques en dimensions 1 et 2.
? : circuit RLC + résolution, comportement et dire que ça se vérifie en pratique.
Pour le cas des coefficients variables, on met la formule de Raabe-Duhamel pour la résolution des EDO linéaires d'ordre 1.

2 Techniques astucieuses pour certaines classes d'équations

Demailly : les équations à variables séparées + exemples, équations de Bernoulli, de Riccati, homogènes + exemples.

3 Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

FGNan4 : le système différentiel, les points critiques, l'intégrale première, la solution est globale, dessins des trajectoires, elles sont périodiques.

4 Pendule simple

FGNan4 : l'équation, l'intégrale première, le portrait de phase.

5 Un exemple d'équation à coefficients périodiques

Zuily, Queffelec : théorème de Sturm périodique, exemple.
Équation de Hill-Mathieu + exemples.

III Stabilité de points critiques, cas des systèmes autonomes

? : déf système autonome, on peut toujours se ramener à des systèmes autonomes.

1 Stabilité des équilibres

Zuily, Queffelec : déf stabilité (asymptotique), instabilité avec dessins.
Rouvière : théorème de Lyapounov pour les systèmes linéaires, puis le vrai théorème de Lyapounov en application, on insiste dessus à l'oral en disant que c'est exactement pour ça qu'il est important de comprendre les systèmes différentiels linéaires.

FGNan4 : Équation de Van der Pol.
Rajouter tous les contre-exemples de Lyapounov ! (voir DVP, par ♡)

2 Étude qualitative des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

Demailly (à la fin, chercher les dessins)/Zuily, Queffelec : étude des trajectoires, faire tous les dessins en annexe. (Il y a un truc bizarre avec les valeurs absolues dans le Demailly.)
On remarque que ça coïncide avec les résultats précédents de Lyapounov.

IV Résolution numérique des équations différentielles

1 Quelques schémas numériques

Demailly : les schémas d'Euler, consistance, stabilité sous condition de local-lipschitziannité, convergence, ordre... On fait pareil avec RK4.
Dessins !

2 Quelques problèmes

Demailly/Crouzeix, Mignot : il faut que le pb de Cauchy soit bien posé, solution numériquement bien posée, bien conditionnée + tous les exemples avec ou sans dessins, les critères sur la constante de Lipschitz pour que ça marche bien.
On dit qu'il existe des méthodes adaptées à ces problèmes (Runge Kutta implicite,...) mais on n'en parlera pas ici.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Questions : → Pourquoi peut-on dériver e^{tA} ?
Parce que c'est une série entière de rayon de convergence infini.

→ Prouver Cauchy-Lipschitz linéaire.
Théorème du point fixe avec la formulation intégrale sur un cylindre de sécurité, puis unique solution maximale par connexité et enfin globalité par Gronwall.

→ Savoir démontrer la formule du wronskien, trouver la différentielle du déterminant, expliquer les dessins, blablabla...

Remarques : Rapport du jury : "On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie, bien sûr).
Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.
Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées."

Références : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Merlin, *Methodix analyse*

Cadre : I intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Motivation : dessin et équation du circuit RLC, on veut comprendre son fonctionnement.
On dit qu'on ne parlera pas de schémas numériques car la solution est explicitement calculable. On utilisera donc plutôt des calculs d'exponentielles de matrices plutôt que des schémas numériques classiques.

I Solutions d'équations différentielles linéaires : existence, unicité, structure

1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Gourdon : déf équation différentielle linéaire d'ordre p, équation homogène, méthode pour ramener les équation à l'ordre 1 + à l'oral : on obtient une matrice compagnon, on étudie donc les systèmes pour $p = 1$, Cauchy-Lipschitz avec local lipschitz, lemme de Gronwall, principe de sortie de tout compact, corollaire : les solutions maximales sont globales !
On fait remarquer qu'il y a n conditions initiales au même point ! On donne le contre exemple avec $A = I_2$, $B = 0$ et $x(0) = x(1) = 0$ et pas de conditions initiales sur y.
Hauchecorne : problèmes quand on multiplie le terme dominant par une fonction s'annulant en au moins un point.
Gourdon : on résout ce problème en se ramenant aux intervalles où le terme dominant ne s'annule pas, puis on tente de recoller. ex : $t^2y'' - 2y = 0$ a des solutions sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, mais aucune sur $\mathbb{R}$.

2 Structure de l'espace des solutions

Pommellet/Gourdon : structure de l'espace des solutions homogènes/inhomogènes, retour aux solutions de l'équation d'ordre p.
Déf wronskien, formule explicite qui le rend simple à calculer, en application, le rang des vecteurs solutions est indépendant de t.
? : un exemple en dimension 2 de calcul de Wronskien où le Wronskien est constant (A antisymétrique par exemple).

II Trouver la solution explicite d'une équation différentielle linéaire

1 Solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

Demailly : déf exponentielle, propriété de commutation, solution générale de l'équation homogène.
exponentielle d'une matrice diagonale, d'un bloc de Jordan, effet du changement de base, méthode complète pour trouver la solution.
Gourdon : forme de la solution avec la somme de polynôme multiplié par des exponentielles.
Pommellet : méthode de résolution d'un EDL d'ordre p, expliquer à l'oral le lien entre le polynôme caractéristique de la matrice compagnon et l'équation caractéristique associée à l'EDO.
Methodix : résolution de l'équation d'ordre 2.
? : résolution de l'équation du circuit RLC.
Gourdon : application à $y'' + 2y' + y = 0$.

2 Cas des coefficients variables

Demailly : déf résolvante, propriétés, calcul de la résolvante si $A(t)$ commute avec $A(t')$ (en particulier si A est constante, on retrouve les résultats précédents et si on est en dimension 1, ça marche bien), remarque si $A(t) = f(t)U + g(t)V$, faire les deux exercices suivants pour avoir un exemple et un contre-exemple.
Pommellet : méthode de Liouville + exemple.
Methodix : utiliser des séries entières + exemple.

3 La méthode de variation des constantes pour les équations non-homogènes

Gourdon : si il y a un second terme, on a des recettes de cuisine : ex $y'' + 2y' + y = te^t$ par le principe de superposition.
Demailly : cas général : la méthode de variation des constantes, elle marche pour les coefficients variables comme pour les coefficients constants.
Gourdon : application à $y'' + y = \tan^2(t)$.

III Étude qualitative

1 Stabilité des équilibres

Zuily, Queffelec : déf stabilité (asymptotique), instabilité + dessin.
Rouvière : théorème de Lyapounov pour les systèmes linéaires, puis le vrai théorème de Lyapounov en application, on insiste dessus à l'oral en disant que c'est exactement pour ça qu'il est important de comprendre les systèmes différentiels linéaires. Si on a la place, les contre-exemples (par ♡).

2 Étude qualitative des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

Demailly (à la fin, chercher les dessins)/Zuily, Queffelec : étude des trajectoires, faire tous les dessins en annexe. (Il y a un truc bizarre avec les valeurs absolues dans le Demailly.)

3 Comportement d'une équation à coefficients périodiques

Zuily, Queffelec : théorème de Sturm périodique, exemple.
Équation de Hill-Mathieu + exemples.

4 Approximation des solution d'une EDO linéaire

Demailly : les schémas d'Euler (adaptés en linéaire), consistance, ordre, on est tjs stable, convergence... On fait pareil avec RK4 et d'autres selon la place.
C'est pratique, on peut bien présenter les problèmes de stabilité en linéaire.

222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Questions : $\rightarrow$ Démontrer Poincaré avec Rellich.
Par l'absurde, on suppose l'existence d'une suite $(u_n)_n$ de H_0^1 telle que $\|u_n\|_2 > n\,\|\nabla u_n\|_2$. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_2}$, alors $\|v_n\|_2 = 1$ et $\|\nabla v_n\|_2 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Donc $\|v_n\|_{H^1} < \sqrt{2}$ donc par Rellich, on extrait une sous-suite (encore nommée $(v_n)_n$ par abus) qui converge dans L^2. On a $v_n \rightarrow v \in L^2$ et $\nabla v_n \rightarrow 0 \in L^2$ par l'inégalité précédente. Il vient v est constant, or $v \in H_0^1$ donc $v = 0$.

Remarques : Rapport du jury : "Cette nouvelle leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).
Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.
Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier permet ceci dans le cadre des fonctions sur $\mathbb{R}^d$.
Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.
Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques."
Je crois que j'ai mis un petit peu trop de choses dans cette leçon... ;)

Références : Allaire, *Analyse numérique et optimisation*
Evans, *Partial differential equations*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*
Rappaz, Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*
Quarteroni, Sacco, Saleri, *Méthodes numériques*
Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*

I Introduction théorique, exemples

Evans : déf EDP linéaire, déf ordre, PLEIN d'exemples, déf problème bien posé.
Nicaise (?) : la classification (Allaire la donne seulement pour deux variables et Evans est un peu flou, voir la vraie version ici : `http://www.math.univ-toulouse.fr/~rondep/CoursTD/polyic2.pdf`)+ à l'oral : sa construction par analogie avec la classification des coniques, exemples.

II Deux équations non classées

1 Les équations de transport

À l'oral : elle est dite hyperbolique car elle vérifie les mêmes propriétés que les vraies équations hyperboliques (propagation à vitesse finie, forme de la solution).
Di Menza : la méthode des caractéristiques (en disant bien qu'il faut pouvoir trouver une solution à l'équation caractéristique), exemples.
? : on explique pourquoi on appelle ça transport avec le cas de la particule qui se déplace dans le fleuve.
On présente un exemple avec une condition en $t = 0$ et des conditions à gauche et à droite et c constant (voir DM Castella).
Rappaz, Picasso : schémas numériques, consistance, stabilité, CFL.

2 L'équation de Schrödinger

Bony/Zuily : Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger + théorème p 150 pour se ramener aux solutions non-élémentaires.

III Étude d'une équation parabolique : l'équation de la chaleur

1 Modélisation physique

Evans : la manière d'obtenir l'équation de la chaleur avec la loi de Fourier/Fick/Ohm + dessin (voir la modélisation physique de Laplace pour certains détails).

2 Résolution classique du problème de la chaleur

Evans : noyau de la chaleur, le problème de la chaleur non-homogène sur $\mathbb{R}^n$, la solution par convolution, principe du maximum (admis), unicité au problème de Cauchy sur U_T et sur $\mathbb{R}^n$ sous conditions de décroissance (admis), propriété de diffusion et de régularisation.
Zuily, Queffelec/Evans : Équation de la chaleur en 1D sur un domaine borné (avec une autre méthode et une méthode d'énergie !)

3 Modélisation numérique par différences finies

On se place sur $[0, 1]$ pour ne pas avoir de problèmes.
Allaire : les schémas EE, EI, rappel des notions de consistance et de stabilité, consistance/stabilité des schémas avec condition CFL, déf convergence, théorème de Lax.
Quarteroni : Étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur

IV Étude d'une équation elliptique : l'équation de Laplace

C'est la même modélisation physique que l'équation de la chaleur, mais en stationnaire (voir Evans).

1 Résolution classique du problème de Laplace dans quelques cas

Allaire : $n = 1$, facile on primitive deux fois...
Amar, Matheron : $n = 2$: fonctions harmoniques, toutes les parties réelles et imaginaires de fonctions holomorphes vérifient l'équation de Poisson, on a une solution unique au problème de Dirichlet sur les domaines de Jordan (expliciter ce que c'est...).
Evans : solution fondamentale de Laplace, la solution sur $\mathbb{R}^n$ (en remplaçant le volume de la boule unité).

2 Résolution avec les espaces de Sobolev

Allaire : problème du laplacien avec Dirichlet, formulation variationnelle, Lax-Milgram, on peut remonter la régularité (admis), le théorème avec $f \in L^2$.

3 Modélisation numérique par éléments finis

On pourrait faire des différences finis, mais on va changer un peu ! =)
Allaire : détailler la méthode générale (trouver des V_h simples, l'approximation de la solution, puis lemme de Céa), en parallèle faire l'exemple en dimension 1 des éléments finis de Lagrange (dessins, matrice du laplacien,...)

V Étude d'une équation hyperbolique : l'équation des ondes

1 Modélisation physique et numérique

Evans : dessin d'une corde, équation des ondes en dimension 1 en expliquant que c'est un PFD local.
Allaire : le θ-schéma, ordre, condition CFL.
? : si on branche des ressorts les uns avec les autres et que l'on applique un PFD, on obtient une fonction donnant le mouvement des bouts des ressorts. Si on approxime cette fonction par le linéarisé, alors on obtient le schéma précédent avec $\theta = 0$! On approxime donc une corde par des ressorts (dessin).

2 Résolution du problème des ondes en dimension 1

Evans : recopier la méthode en ramenant l'équation des ondes à une équation de transport, le théorème.
À l'oral : c'est bien plus compliqué en dimensions supérieures.
déf énergie, application à l'unicité, propagation à vitesse finie.

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

À rajouter : suites équiréparties, critère de Weyl

Questions : → On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ avec $0 < v_0 < u_0$. Montrer que u_n et v_n sont adjacentes.
On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geqslant 0$, donc $u_n \geqslant v_n$ pour tout n. On calcule ensuite $u_{n+1} - u_n$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour montrer la décroissance de u_n et la croissance de v_n. Elles convergent donc vers l et l' tels que $l = \dfrac{l + l'}{2}$, donc $l = l'$.

→ $\cos(\mathbb{Z})$?
$\cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ dense, donc $\cos(\mathbb{Z}) = [-1, 1]$.

→ Convergence de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$?
C'est une série à termes positifs. Si $n - 2 \geqslant k \geqslant 2$, alors $\dbinom{n}{k} \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$. Donc $|S_n - 2| \leqslant \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2(n-4)}{n(n-1)}$.

→ Montrer que si $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$, alors $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
On a $u_{n+1} \leqslant u_n + u_1$, donc $u_n \leqslant nu_1$. Soit p fixé, si $n = pq + r$, alors $u_n \leqslant qu_p + ru_1$ donc comme $1 = \dfrac{pq}{n} + \dfrac{r}{n}$, on a $\dfrac{r}{n} \to 0$ et $\dfrac{q}{n} \to \dfrac{1}{p}$. Comme $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{qu_p}{n} + \dfrac{ru_1}{n}$, on a $\limsup_n \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_p}{p}$, donc $\limsup_n \dfrac{u_n}{n} \leqslant \liminf_p \dfrac{u_p}{p}$, donc $\dfrac{u_n}{n}$ converge.

→ Soit (a_n) suite de réels positifs, et (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{a_n + \sqrt{u_n}}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est bornée si et seulement si (a_n) est bornée. Puis la même chose en remplaçant "est bornée" par "converge".
Le sens de gauche à droite est évident par contraposée.
Si $a_n \leqslant M$ pour tout n, alors supposons que jusqu'au rang n, $u_n \leqslant C$, alors $u_{n+1} \leqslant M + \sqrt{C}$. Si on suppose C assez grand, on a $M + \sqrt{C} \leqslant C$.
Si u_n converge vers l, on a $a_n = u_{n+1}^2 - \sqrt{u_n} \to l^2 - \sqrt{l}$.
Si a_n converge vers a, alors a_n est bornée, donc u_n est bornée. On pose $L = \limsup u_n$ et $l = \liminf u_n$. Alors en utilisant la croissance de $\sqrt{.}$, on voit que l et L sont racines de $\phi(x) = x^2 - a - \sqrt{x}$.En faisant un tableau de variations, on voit qu'il y a deux zéros à ϕ. L'un est en 0 et on appelle l'autre α. Si $a > 0$, alors on a $L \geqslant l \geqslant a > 0$, donc $l = L = \alpha$. Si $a = 0$, les zéros de ϕ sont 0 et 1. Si $u_0 = 0$, alors $u_n = 0$, et sinon, 1 est point attractif pour la racine donc $u_n \to 1$.

Remarques : Il faut bien connaître Bolzano-Weierstrass et savoir le démontrer, et parler des liminf et des limsup.
Quoi ? un copier-coller de la 226 ? Mais non ce n'est qu'une coïncidence... ;)

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Amrani, *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Hauchecorne, *Contre-exemples en mathématiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 1*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 2*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle*

Cadre : une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dire à l'oral qu'on se restreindra à $\mathbb{R}$ car il y a déjà bien assez de résultats et d'applications dessus.

I Suites et convergence

1 Limite d'une suite

Amrani : déf suite, convergente, limite + unicité, bornée, convergente implique bornée, majorée, minorée sur $\mathbb{R}$.
Mettre plein d'exemples, contre-exemples : $(-1)^n$ bornée pas convergente.
Compatibilité de la limite par rapport aux opérations usuelles.

2 Valeurs d'adhérence

Amrani : déf suite extraite, convergence de la suite implique convergence des suites extraites, réciproque fausse avec $(-1)^n$, déf valeur d'adhérence, ex de $(1-(-1)^n)n$.
ZQ : déf liminf, limsup, le théorème, exemples +dessin, suites sous-additives.

3 Théorèmes de convergence

Amrani : suites croissantes majorées, décroissantes minorées, théorème des gendarmes, suites adjacentes +exemple.
Gourdon : exemple de la suite arithmético-géométrique.
Amrani : segments emboîtés, théorème de Bolzano-Weierstrass, convergence de Césaro.
Hauchecorne : contre exemple.

4 Suites de Cauchy

Amrani : déf, convergente implique de Cauchy, toute suite de Cauchy est bornée, toute suite de Cauchy est convergente.
Gourdon : CVA implique CV.

II L'exemple fondamental des suites récurrentes

On appelle suite récurrente d'ordre 1, une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Généralités sur les suites récurrentes, exemples

• Dépendance à f
Gourdon : Si f continue et u_n converge alors c'est vers un point fixe de f (important).
Rouvière : exemple du sin, du cos (avec approximation rapide du point fixe du cos).
FGNan1 : importance de la continuité : le lemme de la grenouille (exo 2.19)

• Quelques exemples
Gourdon : suites arithmétiques, suites géométriques, suites homographiques

• Suites récurrentes linéaires
Sans référence : méthode pour se ramener d'une suite récurrente linéaire réelle d'ordre n à coefficients constants à une suite vectorielle d'ordre 1. f peut s'écrire comme une matrice compagnon.
Gourdon : l'équation caractéristique associée, la solution, cas de la dim 2 sur l'exemple de Fibonacci.

2 Classification de l'attractivité des limites

Demailly : la classification (bien penser à rajouter la condition $\mathcal{C}^2$ pour la superattractivité et les vitesses de convergence/divergence à chaque cas).
Exemples pour le cas critique + équivalent donnant la vitesse de convergence du sin en faisant remarquer qu'elle est basse (Rouvière).
Rouvière : les dessins avec des fonctions correspondantes ($\sqrt{1+x}$, x^2, $e^{2x}-1$).

III Comportement asymptotique

1 Relations de comparaison

Amrani : déf négligeable, équivalent, $(1+\dfrac{1}{n})^n$, $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$.
FGNan2 : partitions d'un entier en parts fixées.
Gourdon : théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible, formule de Stirling.

2 Sommation des équivalents

Gourdon : le théorème de sommation des équivalents, application au dvp asymptotique de la série harmonique.

3 Cas des suites récurrentes

Rombaldi : Méthode des petits pas, exemple.

IV Quelques applications en analyse numérique

→ Approximer les solutions d'équations.
Rouvière : ~~La méthode de Newton.~~
Demailly : méthode de la sécante

→ Résoudre des équations différentielles.
Demailly : déf schéma numérique, ordre, méthodes d'Euler avec ordre.

On dit à l'oral qu'on aurait pu parler des méthodes de résolution de systèmes linéaires ou des méthodes de descente, mais cela utilise des suites vectorielles...

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Remarques : Il faut faire des points méthodes, bien détailler les exemples et être pédagogue. =)
Merci Anne-Elisabeth pour la remasterisation complète de cette leçon !

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Dieudonné, *Calcul infinitésimal*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Amrani, *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*
Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*

Cadre : I intervalle, $f : I \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Développement asymptotique de fonctions

1 Développement limité

Rombaldi : déf DL, exemple de $\frac{1}{1-x}$.
Taylor-Young + pleins d'exemples.

2 Opérations sur les développements limités

Rombaldi : compatibilité des DL avec la combinaison linéaire, le produit, exemples.
La méthode pour la composition, exemples, contre-exemples, méthodes pour l'inverse, la racine, le log, de la réciproque, exemples.

3 Développement asymptotique

Rombaldi : déf DA rapide, les DL sont des DA.
Dieudonné : méthode des fcts définies implicitement, exemple de $y^5 + y = x$.

II Développements asymptotiques et primitive

1 Intégration des développements limités

Rombaldi : la méthode d'intégration, exemples.
La méthode de dérivation, exemple et contre-exemple.

2 Équivalent d'une primitive

Gourdon : méthode de sommation des relations de comparaison, exemple.
Dieudonné : le comportement de $\int_a^x g$ selon $\frac{g'}{g}$ ou $\frac{g}{g'}$ Gourdon : exemple du DA du logarithme intégral.

3 Étude d'intégrales à paramètre

Rouvière : $\boxed{\boxed{\text{Méthode de Laplace}}}$, application à Stirling.
Gourdon : des exemples.
Zuily : méthode de la phase stationnaire (avec Morse dans la preuve, admis).
ZQ : application à la fonction d'Airy.

III Développements asymptotiques de suites et séries

1 Suites récurrentes

Rouvière : critères d'attractivité, exemples/contre-exemples.
Rombaldi : $\boxed{\text{Méthode des petits pas}}$, exemples.
Amrani : méthode d'accélération, exemple.

2 Suites définies implicitement

Rombaldi : tous les exos.

3 Séries numériques

Gourdon : tous les théorèmes sur les séries à termes positifs, séries de Riemann.
Comparaison série/intégrale, série de Bertrand, série harmonique.

Tenenbaum : Quelques ordres moyens.

Dieudonné : les équivalents suivant la limite de $\frac{g'}{g}$, exemples.

4 Formule d'Euler-MacLaurin

Demailly : rappels sur les nombres de Bernoulli, la formule et l'exemple de la formule de Stirling.

5 Méthodes numériques à un pas

Déf vitesse de convergence d'une méthode numérique.
Rouvière/Demailly : Méthodes de Newton et de la sécante, dessin et on insiste sur la vitesse de convergence.
Hirriart, Urruty : Méthode du gradient à pas optimal avec blabla sur la vitesse.

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ convergence de u_n si $f = \sin$, équivalent ?
Méthode classique pour la convergence. Puis c'est la méthode des petits pas : on cherche α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie. On trouve $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3} + o(1)$. On obtient donc une suite à peu près arithmétique. On réécrit u_n en fonction de n et u_0 (et d'un petit o) et on a l'équivalent : $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

$\rightarrow$ FGNal1 ou "*lemme de la grenouille*" : $I = [0,1]$, $f : I \rightarrow I$ continue, $u_0 \in I$, alors u_n converge ssi $\lim u_{n+1} - u_n = 0$.
Réflexe : compact avec une seule valeur d'adhérence $\Rightarrow$ converge. On suppose qu'il y a donc deux valeurs d'adhérences distinctes (il en existe au moins une car on est sur un compact.).
On montre alors que toutes les valeurs entre les deux sont valeurs d'adhérences. En effet, notre grenouille va de sa maison en a à la nourriture en b, entre deux il y a un voisinage de c la mare. Notre grenouille fait des sauts de plus en plus petits... donc il arrive un moment où elle va se mouiller ! Tout ce segment obtenu est alors constitué de points fixes. Il en résulte que a et b ne peuvent être valeurs d'adhérences car dès qu'on veut passer de l'une à l'autre, notre suite devient stationnaire...

Remarques : Ne pas oublier les exemples au départ.
Il est demandé explicitement par le jury de parler des problèmes de convergence d'algorithmes tels que la dichotomie, la méthode de Newton, l'algorithme du gradient, la méthode de la puissance, les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, les schémas d'Euler,...
On peut faire pas mal des choses proposées au dessous sur $\mathbb{C}$, mais je trouve que c'est hors-sujet... donc bon.

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Hauchecorne, *Contre-exemples en mathématiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 1*
Rombaldi, *Analyse matricielle*
Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle*
Hirriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

On se place sur un espace vectoriel normé réel E. On appelle suite récurrente d'ordre 1, une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

I Généralités sur les suites récurrentes

Gourdon : propriété fondamentale : si f continue sur I et $u_n \to a \in I$, alors $f(u_n) \to f(a)$.
Hauchecorne contre exemple si $a \notin I$.
On suppose donc à partir de maintenant que $u_0 \in I$ avec I un **fermé** de E stable par f.

1 Suites réelles

Gourdon : la méthode (à appliquer sur les exemples suivants) : trouver un intervalle stable, conséquences de la monotonie de f, si f continue et u_n converge alors c'est vers un point fixe de f (important).
Rouvière : exemple du sin, du cos (du cosh, du sinh) (avec approximation rapide du point fixe du cos).
FGNan1 : importance de la continuité : le lemme de la grenouille (exo 2.19)

2 Suites vectorielles

Sans référence : méthode pour se ramener d'une suite récurrente linéaire réelle d'ordre n à coefficients constants à une suite vectorielle d'ordre 1. f peut s'écrire comme une matrice compagnon.
Gourdon : l'équation caractéristique associée, la solution, cas de la dim 2 sur un exemple (au hasard X^2-X-1...).
Il n'y a pas de méthode général sinon, c'est du cas par cas pour les suites vectorielles d'ordre 1.

3 Quelques exemples fondamentaux de suites récurrentes

Gourdon : sur un espace vectoriel : suites arithmétiques, suites géométriques +convergence ?
sur $\mathbb{R}$: suites homographiques

II Suites récurrentes et points fixes

E est maintenant un espace de Banach (evn complet). I un intervalle **fermé** stable par f une fonction au moins $\mathcal{C}^1$.

1 Théorème du point fixe de Banach et variantes

Rouvière : théorème du point fixe de Banach (on le fait sur un ev, on ne fera rien sur un espace seulement métrique), contre-exemples sur l'importance d'un intervalle stable et d'être complet.
Application fondamentale : Théorème de Cauchy Lipschitz.
Gourdon : théorème du point fixe itéré, théorème avec le compact + contre exemple

2 Classification des points fixes

Sur $\mathbb{R}$:
Demailly : la classification (bien penser à rajouter la condition $\mathcal{C}^2$ pour la superattractivité et les vitesses de convergence/divergence à chaque cas).
Mettre les exemples pour le cas critique + l'équivalent donnant la vitesse de convergence du sin en faisant remarquer qu'elle est basse (Rouvière).
Rouvière : les dessins avec des fonctions correspondantes ($\sqrt{1+x}$, x^2, $e^{2x}-1$)
Rombaldi : Méthode des petits pas, exemple sur le sin.

Sur $\mathbb{R}^n$:
Demailly : théorème avec le rayon spectral, la super attractivité a encore lieu si $f'(a) = 0$.

3 Application aux orbites de suites

FGNan1 : la déf p90, l'exemple $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$ (le troisième cas avec la figure exagérée avec les deux points fixes), le théorème de Sarkowski.

III Méthodes numériques itératives à un pas, convergence

1 Méthode de Newton-Raphson

→ Approximer les solutions d'équations.
Si on veut approcher un point fixe répulsif, il faut ruser ! C'est ce qu'on fait ici !
Rouvière : La méthode de Newton sur $\mathbb{R}$
Demailly : méthode de la sécante, la méthode en dimension finie supérieure.

2 Méthode du gradient à pas optimal

→ Trouver un minimum local d'une fonction.
Hirriart-Urruty : le lemme de Kantorovitch, méthode du gradient à pas optimal.

3 Résolution de systèmes linéaires

→ Résoudre des systèmes.
Rombaldi : méthode, Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, intervalles de convergence, ça ne converge pas quand le rayon spectral est plus grand que 1.

4 Schémas numériques

→ Résoudre des équations différentielles.
Demailly : déf schéma numérique, ordre, méthodes d'Euler avec ordre, aller plus loin si on a de la place...
Quarteroni : l'équation de la chaleur, quelques détails.
Étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Questions : → Y a-t-il un analogue du TVI sur des espaces autre que $\mathbb{R}$?
Non, rien que sur $\mathbb{Q}$, la fonction $f(x) = x^2 - 2$ vérifie $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$, mais il n'existe pas de rationnel x tel que $f(x) = 0$.
→ La limite de fonctions continues est-elle mesurable ?
La limite de fonctions mesurables est mesurable. En effet, $(\inf(f_n))^{-1}(]a, \infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x, f_n(x) > a\}$, donc $\inf(f_n)$ est mesurable. On fait la même chose pour le sup, puis pour la limsup ou la liminf, et c'est bon.
→ dual de $\mathcal{C}^0$?
Les mesures de Radon !

Remarques : C'est une leçon remplie de pièges vicieux... Il faut vraiment prendre le temps de lire le Hauchecorne à ce sujet et se remettre en question sur ce qu'on croit être vrai ($\int f$ est toujours dérivable même si f n'est pas continue, dérivable et $\mathcal{C}^1$ c'est la même chose, et autres bêtises stupides)
Ensuite cette leçon est bien remplie, il vaut donc mieux passer vite sur les définitions et attaquer les théorèmes importants, les exemples et contre-exemples. Il y a en plus plein de jolis dessins à faire en annexe !

Références : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en Mathématiques*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Quarteroni, Sacco, Saleri, *Méthodes numériques*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Hirsch, Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*

Cadre : on n'étudie que des fonctions réelles à une variable réelle.

I Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

1 Continuité : définitions, premières propriétés

Rombaldi : déf continuité en un pt, sur un intervalle, ex fcts constantes et sinus en 0. Si f continue en x, elle est bornée sur un voisinage.
caractérisation séquentielle et application à $\cos(\frac{1}{x})$, à $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.
Prolongement par continuité, exemples.
Opérations sur les fcts.
Théorème sur la continuité de l'inverse (adapter le théorème 2.32 à la remarque 2.9).(p61)
On termine sur les discontinuités de première espèce et on donne que pour une fonction monotone, il n'y a qu'un nombre dénombrable de discontinuités.

2 Continuité sur un compact

Rombaldi : fct continue sur un compact implique bornée et atteint ses bornes, application : lemme de Riemann Lebesgue.
Déf de l'uniforme continuité, ex de la racine carrée, contre exemples pour dire que la continuité n'implique pas l'uniforme continuité : x^2 et $\sin(x^2)$.
Théorème de Heine, application : toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux, application 2 : toute fonction continue périodique est uniformément continue, (application 3 sur l'intégrale).

3 Dérivabilité : généralités et liens avec la continuité

Rombaldi : déf, cela implique la continuité (réciproque fausse avec $|x|$), fonctions de Warden et Weierstrass dérivables nulle part sur $\mathbb{R}$. densité des fonctions continues dérivables nulle part (Zuily-Queffelec)
Sans référence : le mouvement brownien est non dérivable presque partout presque surement.
déf $\mathcal{C}^1$, contre ex : $x^2\sin(\frac{1}{x})$, déf $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$: ex : exp.
Opérations et dérivabilité, formule de Leibniz, de composition puis formule de dérivée de la bijection réciproque.
Application à arccos, arcsin, arctan...
Enfin on finit sur le théorème qui dit que si on atteint un extremum local, alors la dérivée s'annule. (permet de prouver Darboux et Rolle).

II Théorèmes remarquables

1 Théorème des valeurs intermédiaires

Rombaldi : le lemme et le TVI (reformulé, leur version est toute pourrie), puis le contre-exemple avec $\sin(\frac{1}{x})$.
Application 1 : formule de la moyenne (p51), application 2 : ex 2.21
Thm de Darboux, ex $x^2\sin(\frac{1}{x})$.
Si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, alors f continue ssi pour tout y, $f^{-1}(y)$ est fermé.

2 Théorème de Rolle

Rombaldi : le théorème, exemples après, il n'y a pas unicité, version itérée.
Applications : (autre preuve de Darboux), les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P, racines des polynômes de Legendre, Laguerre et Hermite (utiles pour les bases hilbertiennes), majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.

3 Théorème des accroissements finis

Rombaldi : thm (démo faite avec Rolle), inégalité des accroissements finis.
Applications : théorème de l'Hospital et contre exemple (encore $x^2\sin(\frac{1}{x})$... Quelle leçon originale !), point fixe de Picard, etc...
Demailly : $\boxed{\text{Méthode de la sécante}}$ + dessin (comparaison avec Newton).

4 Développement de Taylor

Rombaldi : les accroissements finis donnent l'inégalité de Taylor-Lagrange, puis reste intégral, et Taylor-Young.
Applications : DL
Hauchecorne : réciproque fausse, avoir un DL2 n'implique pas être deux fois dérivable.
Extrema, inégalités avec TL, DSE, Kolmogorov (qui compense un peu le manque des inégalités de Cauchy), ...
Quarteroni : étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur.

III Suites de fonctions

Gourdon : thm de continuité/dérivabilité de la limite, exemple de l'exp.
Zuily, Queffelec : théorème de Weierstrass.
Hauchecorne : la limite simple ne suffit pas, contre-exemples dérivation
Gourdon : théorèmes de Dini

IV Exemples remarquables

1 Fonctions lipschitziennes

Rombaldi : la continuité uniforme est impliquée par le caractère lipschitzien.
Hauchecorne : la réciproque est fausse avec la racine carrée non lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ mais uniformément continue.
? : Rademacher

2 Fonctions convexes

Rombaldi : propriétés liées à la continuité et à la dérivabilité des fonctions convexes, exemples et contre-exemples.

3 Équicontinuité

Hirsch-Lacombe : Théorème d'Ascoli (avec la définition de l'équicontinuité rappelée).
Demailly : Cauchy-Arzela-Peano

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Remarques : Rapport du jury : "Les propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle sont attendues. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation.
Pour les candidats solides, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon.
Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction."

Références : Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques spéciales 3*
Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en Mathématiques*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Hiriart-Urruty, Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Ouvrard, *Probabilités 2*
Gonnord, Tosel, *Calcul différentiel*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3 et analyse 1*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*

I Fonctions monotones

1 Définition, premières propriétés, exemples

RDO : déf, dessin, exemples , compatibilité avec les opérations usuelles.
? : exemple de la fonction de répartition, Bochner-Herglotz.

2 Régularité et caractérisation des fonctions monotones

RDO : thm de la limite monotone, corollaire 2 sur l'intérieur de I, l'ensemble des pts de discontinuité est au plus dénombrable, continuité d'une fct monotone, thm des fcts réciproques, un homéo est strictement monotone.
Hauchecorne : rajouter des exemples et contre-exemples.
RDO : le thm liant monotonie et dérivabilité (rajouter avec la dérivée à gauche), application à la caractérisation des applications strictement monotones, contre-exemple.
Pommellet : dérivabilité pp des fonctions monotones (admis).
Briane, Pagès : exemple de l'escalier de Cantor.

3 Suites de fonctions monotones

Gourdon : théorèmes de Dini.

4 Fonctions à variations bornées

Gourdon/FGNan1 : déf fonction à variation bornée, c'est la somme de deux fonctions monotones, corollaire : l'ev engendré par les fonctions monotones est l'ev des fonctions à variations bornées.

II Fonctions convexes

1 Définition, premières propriétés

HUL : on fait tout pour les fonctions convexes à plusieurs variables en précisant à l'oral ce que cela donne en une variable.
déf fonction convexe, strictement convexe, fortement convexe (+exemples en 1D), épigraphe et propriété de convexité (+ dessin), ex de $\frac{1}{2} < Ax, x >$ qui est fortement convexe et de quelques normes sur $\mathbb{R}^2$ + dessins.
Rombaldi : compatibilité avec la somme, la limite simple et contre-exemples pour le produit et la composition.
Déf log convexité, ça implique la convexité.
Exemple de exp et de la fonction Γ, cela la caractérise ! (chercher à Gamma dans l'index)

2 Caractérisation des fonctions convexes

Rombaldi : f continue est convexe ssi $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$, contre-exemple de l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ (Hauchecorne).
Propriétés des trois cordes + dessin.
HUL : caractérisation avec la différentielle, en dim 1 cela veut dire f' croissante, dessins, elles ne sont pas toutes différentiables, ex bidon de $|x|$.
Théorème si la dérivée seconde existe, f peut être strictement convexe avec une différentielle seconde semi définie positive, ex $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.
Hiriart-Urruty : $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ est fortement convexe ssi A est définie positive, de plus on connaît la constante de forte convexité, (Ax, x) est donc coercive.

3 Propriétés de régularité

Rombaldi : f convexe concave ssi f affine, constante ssi majorée, contre-exemple, application à $y'' - qy = 0$.
Liens avec la continuité, la dérivabilité à gauche et à droite, contre-exemples, convexe dérivable implique $\mathcal{C}^1$ (on l'explique avec le dessin des trois cordes).
Gonnord, Tosel : en dimensions supérieures, on a l'existence de dérivées partielles en tout point et différentiabilité pp (admis).

III Applications

1 Étude de suites et de séries

Gourdon : monotonie des suites récurrentes, exemple du sinus, comparaison série-intégrale, application à la série harmonique.

2 Inégalités de monotonie

Rombaldi : les inégalités.

3 Inégalités de convexité

Rombaldi : inégalité de Young (application à Hölder à l'oral), inégalité sur sin + dessin, Jensen $\sum$ et $\int$.
Rouvière : inégalité arithmético-géométrique par convexité de exp et application à la mise en boite à peu de frais.
Hirriart-Urruty : méthode du gradient à pas optimal (on présente Kantorovitch et on fait vite le gpo).
Briane Pagès : Hölder, inclusion topologique des L^p, Minkowski, les L^p sont des evn.
Ouvrard : inégalité de Hoeffding + application.

4 Optimisation

? : si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.
Rouvière : log-concavité du déterminant.
FGNal3 : ellipsoïde de JL.
Hirriart, Urruty : méthode du gradient à pas optimal.
Ciarlet : application à la résolution de systèmes linéaires bien conditionnés (matrice du laplacien !).

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Questions : $\rightarrow$ Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs, soit R_n son reste, alors montrer que $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$.

Cet exercice parle de reste donc on a le réflexe de la transformation d'Abel : $\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{R_n^\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n^\alpha} + \frac{u_0}{R_0^\alpha}$.

Puis on a $\frac{R_{n-1} - R_n}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$, donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_N}^{R_0} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{R_0} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$, et celle-ci converge si $\alpha < 1$.

Remarques : Rapport du jury : "De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, ...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon."
Le schéma mnémotechnique de Léa :
CVN $\Rightarrow$ CVA $\Rightarrow_{\text{Complet}}$ CVS
CVN $\Rightarrow_{\text{Complet}}$ CVU $\Rightarrow$ CVS
Il y a à peu près tout ce qu'il faut mettre dans le Hauchecorne. On peut le regarder si on pense oublier quelque chose.
Au début, je voulais parler des sommes de Riemann dans la dernière partie, mais comme le terme général dépend de n, ça me paraît hors sujet.
Penser au super chapitre sur le calcul approché de la somme d'une série dans Amrani.

Références : Amrani, *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*
Hauchecorne, *Contre-exemples en mathématiques*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les séries et leur convergence

1 Premières séries, sommes partielles, restes, exemples

Amrani : déf série, convergence d'une série, déf somme, ex de la série géométrique avec terme général a^n tel que $|a| < 1$, on rajoute ce que ça donne si $a = 1$, $a > 1$ et la formule pour $a = e^{i\theta}$, déf reste, l'ensemble des séries est un $\mathbb{K}$-ev et les convergentes forme un sev, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$, contre exemple $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$, utilisation de la contraposée pour les séries de terme général $\sin(\alpha n)$ et $\cos(\alpha n)$, l'exemple de séries télescopiques.

2 Critère de Cauchy et absolue convergence

Amrani : critère de Cauchy, application à la série harmonique, à l'oral : c'est juste la conséquence de la complétude de $\mathbb{K}$, déf absolue convergence+ théorème, contre-exemple, déf semi-convergence.

II Comportement des séries à termes positifs

À l'oral : tout ce qui est présenté ici est vraie pour les suites négatives, il suffit de modifier quelques petits trucs.

1 Relations de comparaisons et séries de références

→ Au vu du titre de la leçon, il faut insister sur cette partie !
Amrani : une STP converge ssi ses sommes partielles sont majorées (soit ça converge, soit ça fait $+\infty$), règle de comparaison, exemples $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$, règle d'équivalence, règles de domination.
Rajouter des exemples présents dans les exercices.
Hauchecorne : plein de contre exemples si les séries ne sont pas positives.
Amrani : séries de Riemann, conséquence sur une règle de comparaison.
Comparaison série-intégrale + **dessin** (à l'oral : fait un lien entre une "somme dénombrable" et une "somme indénombrable" d'infinitésimaux, c'est très important), l'exemple $u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$, encadrement du reste, séries de Bertrand, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, on a le même comportement chez $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Tenenbaum, Quelques ordres moyens.

2 Règles de convergence de Cauchy et de D'Alembert

À l'oral : on dérive les règles des séries entières et ça marche bien !
Amrani : règle de Cauchy + exemple, règle de D'Alembert + exemple, les limites dans ces deux théorèmes sont les mêmes (les rayons de convergence des séries entières associées...), critère de Raabe-Duhamel.
A la fin du chapitre, majoration du reste de Cauchy et de D'Alembert.

III Le problème de la semi-convergence

À l'oral : 1) Que fait-on si on ne peut pas appliquer la convergence absolue ?
2) En quoi la convergence absolue est beaucoup plus puissante que la simple convergence ?

1 Séries alternées

Amrani : déf, critère des séries alternées + majoration du reste et encadrement de la somme, exemple, contre-exemple.

2 Critère d'Abel

Gourdon : méthode de la transformation d'Abel (à l'oral : c'est une IPP sur des sommes), critère d'Abel, l'exemple de $\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$.

3 Produit de Cauchy de deux séries

Amrani : déf, exemple, théorème de convergence du produit de Cauchy, application à $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

4 Le problème des familles sommables

Amrani : théorème de sommation par paquets, contre-exemple.
Déf série commutativement convergente, le théorème et le contre-exemple.
Hauchecorne : séries doubles, théorème, contre-exemples.

IV Utilisations de fonctions

1 Séries entières

Gourdon : déf série entière, lemme d'Abel.
Théorèmes d'Abel et taubérien faible, exemples et contre-exemples.

2 Séries de Fourier

Gourdon : déf séries de Fourier, on rajoute que les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne, égalité de Parseval (attention f L^2 suffit), théorème de Dirichlet et corollaire, ex d'application avec le calcul de $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ en ajoutant la fonction utilisée.

3 Formule d'Euler-Mac Laurin

Gourdon : déf des polynômes de Bernoulli, formule d'EML (en exo) + application à la série harmonique (on rajoute les calculs si on a la place).

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Remarques : Rapport du jury : "Trop de candidats se limitent au simple cas où X est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives. À propos de la version bidimensionnelle de la méthode de Newton, il convient de comprendre la généralisation en dimension supérieure de la division par la dérivée."
Karine Beauchard dit que parler de schémas numériques est hors-sujet. Je suis d'accord avec elle.

Références : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Quarteroni, *Méthodes numériques*
Rappaz, Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Hirriart, Urruty, *Optimisation et analyse convexe*

I Introduction aux méthodes itératives, à leur but et à leur étude

1 La méthode de dichotomie

Pommellet : le TVI, la méthode + dessin, vitesse de convergence, ça ne marche qu'en dimension 1.

2 Théorème de Picard, variations, exemples

Demailly : la méthode pour passer du problème $f(x) = 0$ à $g(x) = x$.
Rouvière : le théorème de point fixe, la vitesse de convergence, PLEIN d'exemples et de contre-exemples, le cas avec une itérée contractante, le théorème sur un compact en enlevant l'hypothèse contractante, contre-exemple de la translation.
On va donc trouver de bonnes fonctions où on itérera $x_{n+1} = f(x_n)$.

3 Différents types de points fixes

Demailly/Rouvière : définitions des points fixes attractifs/répulsifs/superattractifs, le cas douteux, exemples. Mettre plein de dessins.
Exemple de $x^3 - 4x + 1$ pour expliquer la ruse dans le cas répulsif.

4 Outils pour la résolution de systèmes linéaires

Il existe des méthodes exactes (LU) mais on va se concentrer sur les méthodes itératives. Elles sont (beaucoup) plus rapides en grande dimension.
Ciarlet : l'introduction aux méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, le conditionnement, le théorème avec le rayon spectral.
Les commentaires et formules sur la stabilité numérique d'une résolution de système linéaire.

II Méthodes de type Newton

1 Méthodes en dimension 1

Demailly/Rouvière : l'heuristique de la méthode de Newton (approximer par la tangente), la méthode, la vitesse de convergence et l'équivalent.
Exemple du nombre d'or avec un beau dessin ♡, la vitesse est optimale avec $f(x) = x^2 - y$.
Demailly : à l'oral : inconvénients de Newton, méthode de la sécante

2 Méthode de Newton-Raphson

Demailly : la méthode (la preuve utilise le théorème de convergence des systèmes linéaires).

III Méthodes approchées de résolution de systèmes linéaires

1 Méthodes itératives linéaires

Rappaz, Picasso : la décomposition de A, l'algorithme, méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, les cas particuliers de convergence, l'exemple de la matrice laplacien, la méthode de relaxation.
Ciarlet : elle ne peut converger que si $\omega \in]0, 2[$, comparaison Jacobi et Gauss-Seidel, comparaison Jacobi et relaxation, le ω optimal.
Quarteroni : on peut aussi prendre la formule de l'inverse $A^{-1} = \sum (I - A)^k$ et la tronquer pour obtenir une méthode calculant l'inverse. Si on la multiplie par b alors on a une méthode simple de résolution de systèmes linéaires. Elle converge de manière géométrique en $\rho(I - A)^k$ si $\rho(I - A) < 1$.

2 Méthodes de gradient

Idée : annuler f, c'est trouver le minimum d'une primitive de f. En fait, on cherche juste à minimiser la fonctionnelle $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$. Attention, il faut $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$!
? : méthode de gradient à pas fixe, convergence.
Hirriart, Urruty : lemme de Kantorovitch, méthode de gradient à pas optimal, remarque sur la dépendance

au conditionnement, dessin.
Quarteroni : méthode de gradient conjugué, convergence (admis).

233 - Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

À rajouter : moindres carrés, Kacmarz

Remarques : rapport du jury : "Cette leçon puise une bonne part de son contenu dans le programme complémentaire de l'oral, commun aux différentes options. Les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont bien sûr centrales pour ce sujet où le rôle du conditionnement dans l'étude de sensibilité des solutions de systèmes linéaires doit être bien identifié. L'analyse de convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, en identifiant leurs avantages par rapport aux méthodes directes, trouve naturellement sa place dans cette leçon, tout comme l'étude d'algorithmes de recherche d'éléments propres, avec la méthode de la puissance (ou la méthode QR) et des applications à des matrices vérifiant les hypothèses des théorèmes de Perron-Frobenius. Le cas particulier des matrices symétriques définies positives doit amener à faire le lien avec les problèmes de minimisation et les méthodes de gradient. On notera d'ailleurs que de tels développements peuvent aussi être exploités avec bonheur dans la leçon 226.
Les techniques d'analyse permettent aussi l'investigation des propriétés spectrales de matrices et la localisation de valeurs propres de matrices (théorème de Gershgörin, suites de Sturm). Le jury encourage les candidats à illustrer leur propos d'exemples pertinents issus de la théorie de l'interpolation ou de la résolution approchée de problèmes aux limites, incluant l'analyse de stabilité de méthodes numériques."
Cette leçon est géniale ! =D

Références : Quarteroni, Sacco, Saleri, *Méthodes numériques*
Rappaz, Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*
Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
Hirriart, Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Allaire, *Analyse numérique et optimisation*
Amodei, Dedieu, *Analyse numérique matricielle*

On rajoute des algorithmes un peu partout en annexe.
Cadre : on n'étudie que des matrices réelles pour simplifier.

I Introduction aux outils, problèmes et enjeux de l'analyse numérique matricielle

1 Normes matricielles et rayon spectral

Quarteroni : déf norme matricielle, l'exemple de la norme $\max(|a_{i,j}|)$, normes subordonnées, l'exemple des normes p, les formules, théorème sur les normes subordonnées.
Les relations avec le rayon spectral, l'application à la convergence de suites et séries.

2 Problèmes et objectifs de la résolution de systèmes linéaires

Quarteroni : positionnement du problème : $Ax = b$, les équivalences avec A inversible, si on le résout avec Cramer, on a une complexité en $O((n+1)!)$.
Rappaz, Picasso : si le système est surdéterminé, moindres carrés, le théorème avec l'équation à résoudre.
Quarteroni : déf conditionnement, exemples des matrices de Hilbert et du laplacien qui ont un conditionnement tout pourri, formule pour la norme 2, formule pour les erreurs d'arrondis.
Schémas EE et EI aux différences finies pour l'équation de la chaleur, on précise le système linéaire à résoudre et la condition CFL pour la stabilité du schéma.

Étude du θ-schéma pour l'équation de la chaleur

3 Approximation des valeurs et vecteurs propres

? : pour $n \geqslant 5$, on ne sait plus du tout trouver les valeurs propres. Pour les vecteurs propres, c'est encore pire !
Quarteroni : $\lambda \leqslant \|A\|$ pour toute norme subordonnée, disques de Gerschgörin, les deux premières propriétés, l'exemple + le dessin.
Théorème de Bauer-Fike.

II Résolution numérique de systèmes linéaires

1 Méthodes directes

Quarteroni : méthode de résolution d'un système triangulaire, coût en $O(n^2)$, un exemple, inverse d'une matrice triangulaire, coût en $O(n^3)$.
Ciarlet : la méthode de Gauss (celle du Quarteroni oublie que l'on peut échanger des lignes...), il faut bien choisir le pivot pour éviter les erreurs d'arrondis.
Quarteroni : l'exemple.
Ciarlet : le coût de la méthode.
La factorisation LU dans le cas où tous les pivots sont non-nuls, son intérêt (résoudre très vite plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice A), le théorème, la décomposition LU d'une matrice par bande, application à la matrice du laplacien, le coût minime de cette opération.
Le cas des matrices symétriques définies positives, décomposition de Cholesky, le coût est divisé par 2.

2 Méthodes itératives linéaires

Rappaz, Picasso : la décomposition de A, l'algorithme, théorème de convergence + vitesse de décroissance de l'erreur, méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, les cas particuliers de convergence, l'exemple de la matrice laplacien, la méthode de relaxation.
Ciarlet : elle ne peut converger que si $\omega \in]0,2[$, comparaison Jacobi et Gauss-Seidel, comparaison Jacobi et relaxation, le ω optimal.
Amodei : des exemples/contre-exemples où les méthodes itératives convergent ou non.
Quarteroni : on peut aussi prendre la formule de l'inverse $A^{-1} = \sum (I-A)^k$ et la tronquer pour obtenir une méthode calculant l'inverse. Si on la multiplie par b alors on a une méthode simple de résolution de systèmes linéaires. Elle converge de manière géométrique en $\rho(I-A)^k$ si $\rho(I-A) < 1$.

3 Méthodes de gradient

En fait on cherche juste à minimiser la fonctionnelle $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$. Attention, il faut $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$!
Allaire : méthode de gradient à pas fixe, convergence.
Hirriart, Urruty : lemme de Kantorovitch, méthode de gradient à pas optimal, remarque sur la dépendance au conditionnement, dessin.
Quarteroni : méthode de gradient conjugué, convergence (admis).

III Recherche numérique de valeurs propres et de vecteurs propres

1 Méthodes de puissance

Quarteroni : la méthode de la puissance, théorème de convergence + rajouter la convergence des quotients de Rayleigh, méthode de la puissance inverse en utilisant les algorithmes de la partie précédente, méthode de la puissance inverse translatée (attention à ce que $\mu \neq \lambda$ sinon la matrice n'est plus inversible), on peut ainsi obtenir tout le spectre et tous les vecteurs propres d'une matrice diagonalisable si on a une estimation des valeurs propres (transition vers la partie suivante).
? : on peut parler des bug obtenus quand A n'est pas diagonalisable ou avec des valeurs propres non toutes différentes.

2 Méthode QR

Ciarlet : décomposition QR (admis, on dit juste que ça se fait de manière stable avec les matrices de Householder).
Quarteroni : méthode QR + convergence.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

À rajouter : D'autres applications, un développement sur les l^p (complétude) ?

Questions : → La convergence en probabilité est-elle métrisable ?
Oui avec $d(X, Y) = \mathbb{E}[\min(1, |X - Y|)]$.
→ Montrer que si $\mu(X) < \infty$, alors il y a inclusion topologique de L^p dans L^q pour $p \geqslant q$, càd $\|.\|_q \leqslant C \|.\|_p$
→ transformée de Fourier de la gaussienne : IPP puis résolution d'une équa diff.

Remarques : Il ne faut pas trop insister sur L^2 pour ne pas faire de hors sujet. Par contre, il faut bien penser à parler de l'exemple l^p !
Dans la dernière partie, on est plus libre : on peut mettre des probas (Vitali), de la convolution, de la transformée de Fourier, des Sobolev...

Références : Briane Pagès, *Théorie de l'intégration*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Zuily, *Introduction aux distributions et équations aux dérivées partielles*
Hirsch Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*
Zavidovique, *Un max de maths*
Rudin, *Analyse fonctionnelle*

Cadre : on se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, un corps $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera λ la mesure de Lebesgue.

I Définition des espaces L^p et premiers résultats

1 Les espaces $\mathcal{L}^p$

Tout est dans Briane Pages.
On définit les $\mathcal{L}^p$ pour $p \neq \infty$. On pense à faire l'exemple sur l^p et à préciser que c'est la mesure de comptage.
On cite Hölder et Minkowski et le cas particulier de Cauchy-Schwarz. On applique ces inégalités pour montrer que les $\mathcal{L}^p$ sont des $\mathbb{K}$-ev.
On définit la semi norme, et on dit que c'est triste de n'avoir qu'une semi norme.

On définit ensuite $\mathcal{L}^\infty$ avec le supremum essentiel.

2 Les L^p : définitions, inclusions, complétude

(Encore Briane Pagès)
On définit les L^p par le quotient. On explique un peu l'intérêt en expliquant que ce sont des evn.
On précise que le quotient est inutile pour les l^p.
On finit sur la topologie avec le théorème de Riesz-Fischer (en disant qu'on utilise la convergence dominée pour le prouver mais on verra ça plus tard).

Remarque de Breton : Dans un espace de proba, on peut montrer $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. Cela donne de la cohérence à l'espace un peu seul L^∞.

(retour au Briane Pages) Inclusions entre L^p si la mesure est finie. Contre exemple dans $\mathbb{R}$ pour montrer qu'il n'y a aucune inclusion dans le cas général.
Préciser que c'est le "contraire" pour les inclusions dans l^p.

3 Convergence dans les L^p

Si la mesure est finie, si $p \leqslant q$, $\|.\|_p \leqslant C \|.\|_q$ donc convergence dans L^q implique convergence dans L^p.
Préciser que l'inclusion des L^p est une INCLUSION TOPOLOGIQUE.
Dans Briane Pagès, théorème de convergence L^p dominée. contre exemple si non dominée : $n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$.
Convergence L^p n'implique pas convergence pp -> contre exemple à la même page du Briane Pagès. Mais dans Brézis, on a le théorème qui donne la convergence pp d'une suite extraite.
Enfin on peut préciser que la convergence L^∞ ne fait qu'impliquer la convergence pp.

II Analyse fonctionnelle dans les L^p

1 Dualité

On utilise le Brézis : théorème de Riesz, on donne l'isomorphisme isométrique entre $L^{p'}$ et $(L^p)'$. On en déduit que L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.
On précise les cas L^1, L^∞ qui ne sont pas réflexifs mais on connaît le dual de L^1.

2 Densité

Brézis : densité de $\mathbb{C}_c^0$ dans L^p pour $p \neq \infty$.
Application : inégalité de Hardy
Autre application : L^p est séparable pour $p \neq \infty$ (en approchant avec les fonctions étagées à coefficients rationnels définies sur des pavés aux bords rationnels).
Préciser que L^∞ n'est pas séparable.

BP : les fonctions étagées intégrables sont dense pour $p \neq \infty$. Sur la tribu borélienne munie de λ, on a densité des fonctions en escalier à support compact.

3 Le Hilbert L^2

Briane, Pagès : c'est un Hilbert avec tel produit scalaire. On cite le théorème de Riesz sur L^2 et on précise que celui du dessus est prouvé en se ramenant au produit scalaire sur L^2.
On cite rapidement le théorème de projection et on dit que c'est utile : ex : moindres carrés. C'est un L^p important !
Zavidovique/Rudin : se ramener à L^2 permet de prouver des merveilles : Théorème de Grothendieck

III Applications diverses des espaces L^p

1 Convolution

Briane-Pagès : définition de la convolution pour les fonctions boréliennes positives. Cadre général d'existence avec inégalité de Young. L'espace $(L^1(\lambda^d), +, ., *)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative, mais ne possède pas d'unité. On peut ainsi parler des approximations de l'unité en précisant ce qu'une unité est. On peut montrer que le dirac n'est pas dans L^1. On parle ensuite de la régularisation par convolution (avec la dérivée qui n'agit que sur une partie de la convolution) et en corollaire de la densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p en convolant avec des suites régularisantes.

2 Transformée de Fourier

Briane Pagès/ Zuily : déf sur L^1. Les transformées de Fourier sont uniformément continues et bornées. On montre la compatibilité avec la convolution. On regarde quand on peut les dériver en précisant le lien avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Puis déf de l'espace de Schwartz. Enfin théorème d'inversion de Fourier en disant que $\mathcal{F}$ est une bijection bicontinue.
On finit avec la transformation de Fourier-Plancherel.

3 Les espaces $W^{1,p}$ et de Bergman

Partie courte d'ouverture.
Hirsch Lacombe : théorème de Sobolev, réflexivité...
Bayen, Margaria : espace de Bergman

235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Questions : → Montrer que $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}}\right) \mathrm{d}x$ est bien définie, avec a, $b > 0$.
Le problème est en l'infini, et on a $e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}} = \frac{b-a}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

→ Convergence, convergence absolue de $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$?
Il faut faire une intégration par parties astucieuse.

$$\int_1^A \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(1)-\cos(x)}{x^\alpha}\right]_1^A + \alpha \int_1^A \frac{\cos(1)-\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$$

Le premier terme tend vers zéro et le second converge absolument.
Pour la convergence absolue, on a deux manières de faire :
1) On a CVA si $\alpha > 1$. Dans l'autre cas, on écrit $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\mathbb{1}_{\sin(x)\geqslant\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \infty$.
2) Sinon on remarque que $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x < \infty$ et on sait que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. On a convergence de l'intégrale $\int_1^A \frac{\cos(2x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ par le même travail que précédemment. Puis on a convergence de $\int_1^A \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ ssi $\alpha > 1$.

→ Intégrale de Frullani :
On se donne une fonction continue réelle f définie sur $\mathbb{R}^+$ et ayant une limite l à l'infini. Alors l'intégrale de Frullani est $I = \int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ avec a, $b > 0$. Calculons sa valeur !
On a après quelques calculs : $I = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{aR}^{bR} \frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s - \int_{ar}^{br} \frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s$. Il suffit donc de prouver la convergence et de trouver la valeur de ces deux intégrales.
Pour la première, on a, pour R assez grand, $\int_{aR}^{bR} \frac{|f(s)-l|}{s}\mathrm{d}s \leqslant \int_{aR}^{bR} \frac{\epsilon}{s}\mathrm{d}s = \epsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, donc $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{aR}^{bR} \frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{aR}^{bR} \frac{l}{s} = l \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Puis on peut faire à peu près la même chose pour l'autre intégrale par continuité. On a donc $I = (l - f(0)) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

→ Démontrer la formule de la moyenne.
Théorème des valeurs intermédiaires avec la bonne fonction.

Remarques : Pendant un bon moment, j'ai cru en faisant cette leçon que on ne devait traiter que les problèmes d'interversions d'une limite avec une intégrale, mais en fait il faut aussi traiter les interversions de limites et les interversions d'intégrales ! Tout se recoupe en fait.
Le chapitre consacré du Pommellet contient à peu près tout le plan.

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*

Rudin, *Analyse réelle et complexe*
Faraut, *Calcul intégral*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*
Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*

I Premiers théorèmes d'interversion

1 Limite et convergence uniforme

Gourdon/Pommellet : continuité de la fonction limite, le premier thm d'interversion des limites, premier théorème d'interversion limite/intégrale, corollaire sur les séries, dérivabilité de la limite (version $\mathcal{C}^p$ à l'oral), version série + application à la série exponentielle.

2 Le cas des séries entières

Gourdon : lemme d'Abel, régularité + holomorphie (on peut passer à la limite dans tout le cercle de convergence), rajouter la formule de Cauchy pour une interversion intéressante qui est la base de tout.
Problèmes au bord, théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible + exemples.

II Interversions limites intégrales avec la théorie de la mesure

1 Intégrales de suites de fonctions positives

Briane Pagès : cv monotone, $\int f \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f$ nulle pp, application au calcul de la limite de $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathrm{d}x$.
Lemme de Fatou, si $\sup \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, application pour l'intégrale de la dérivée, contre exemple de l'escalier de Cantor,lemme de Fatou amélioré.

2 Théorème de convergence dominée

Briane Pagès : Convergence dominée, remarque avec $\frac{f(x+n)}{n}$ pour dire que ce théorème ne résout pas tous les problèmes, puis intégration d'une dérivée (suite).
Version série de fonctions, lemme de Borel-Cantelli, continuité de l'intégrale par rapport à la mesure.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman

3 Intégrales à paramètre

Briane Pagès : (à l'oral : applications du thm de CV dom) continuité, dérivabilité (version holomorphe à l'oral), application à Γ.
Rouvière : Méthode de Laplace, application à Γ.

III Interversions d'intégrales

Briane Pagès : les théorèmes, les contre-exemples moches, puis adaptation du théorème aux séries doubles. (dans la partie changement de variables) exemple de $\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \mathrm{d}x$ et volume de la boule unité.
Gourdon : ex4 : $\sum(\zeta(k) - 1) = 1$ pour les sommes doubles.
Puis produit de Cauchy, théorème, exemple.

IV Application à la transformée de Fourier

Briane Pagès : déf, Riemann-Lebesgue avec cv dom, régularité avec les théorèmes de régularité + corollaire, ex de la transformée de Fourier de la gaussienne, injectivité avec Fubini, formule d'inversion.
Rudin, Faraut : Transformée de Fourier-Plancherel.
Zuily : les théorèmes rapides sur l'espace de Schwartz.
Bony/Zuily : application de tout ça : Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger

→ Rajouter des contre-exemples du Hauchecorne un peu partout.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes d'intégration des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Questions : $\rightarrow$ Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$
$V_{n+1}(r) = \int_{-r}^{r} V_n(\sqrt{r^2 - x})\mathrm{d}x$ et $V_n(r) = r^n V_n(1)$.
$\rightarrow$ Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x))\mathrm{d}x$.
On développe tan en $\frac{\sin}{\cos}$ puis en utilisant les formules de trigonométrie, on trouve $\ln(1+\tan(x)) = \ln(\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})) - \ln(\cos(x))$ (on arrive à $\cos + \sin$ puis on écrit $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.). Pour finir, on fait un changement de variable et on tombe sur une constante.
$\rightarrow$ Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$. On note α son minimum et β son maximum. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -\alpha\beta$.
On observe $f - \alpha \geqslant 0$ et $\beta - f \geqslant 0$. On multiplie ces inégalités et on intègre.
$\rightarrow$ Soit f positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f < \infty$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Remarques : on doit bien faire attention à choisir entre Riemann-intégrabilité et Lebesgue-intégrabilité. Le Gourdon est rempli de Riemann... C'est gênant.

Références : Gourdon, *Analyse*
Briane Pagès, *Théorie de l'intégration*
Rombaldi, *Interpolation et approximation*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
Amar Matheron, *Analyse complexe*
Zuily, *Introduction aux distributions et équations aux dérivées partielles*
Zuily Queffélec,*Analyse pour l'agrégation*
Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*

Les théorèmes ne sont pas du tout dans l'ordre ! On dit à l'oral qu'on les présente dans ce sens pour plus de clarté et de pédagogie.

I Méthodes directes

1 Primitives

Gourdon : ex de primitives, fractions rationnelles...

2 Intégration par parties

Gourdon : proposition puis ex sur Wallis
? : primitives de ln, de arctan

3 Changement de variables sur $\mathbb{R}$

Gourdon : théorème en 1 D, ex avec les fonctions trigonométriques, Bioche (Methodix)

4 Intégrales multiples

Gourdon : Fubini + intégrale de Gauss, théorème de changement de variable en multi D : coordonnées polaires, sphériques
Briane, Pagès : volume de la boule unité

II Analyse complexe

1 Prolongement analytique

Objectif Agrégation : le théorème.
Zuily : le prolongement analytique de l'intégrale dans la solution élémentaire de Schrödinger.

2 Théorème des résidus

Tout est dans Amar Matheron, même les applications.
Formule des compléments

III Autres méthodes

1 Convergence dominée

Briane, Pagès : théorème de convergence dominée, application à l'intégrale de Fresnel.
Puis application du théorème de convergence dominée aux séries, pleins d'exemples sympa de permutation intégrale somme sont présents dans les exos.

2 Théorème de régularité des intégrales à paramètre

Briane, Pagès : théorèmes de continuité et dérivation des intégrales à paramètre.
En application : calcul de transformées de Fourier de la gaussienne ou de $\frac{1}{x^2+1}$ dans les exos juste après à l'aide d'équas diffs simples. Il y a des exemples dans le Gourdon mais il faut faire attention, leur théorème de dérivation ne vaut que sur un compact !!!

3 La transformée de Fourier

Zuily : définition de la transformée, de l'espace de Schwartz et des distributions tempérées, propriétés d'inversion de Fourier.
Dans un tout autre monde, on peut aussi dire que la régularité des transformées de Fourier est une application des théorèmes de régularité cités au dessus et on peut mettre en application la transformée de Fourier de la gaussienne (avec IPP et équa diff).
Bony, Zuily : application : Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger avec le lemme.

IV Méthodes d'approximation d'intégrales

1 Sommes de Riemann

Gourdon : def + exemple juste après (+ex du Gourdon p181 $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2)$).

2 Méthodes classiques

Demailly : méthode des rectangles, des trapèzes, leur ordre.

3 Méthode de Gauss

Rombaldi : méthode rapide de calcul des coefs. Application aux polynômes de Tchebychev. Puis on précise que cette méthode est exacte sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (et qu'on ne peut pas faire mieux).

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Remarques : le plan est en gros dans le Zuily-Queffelec.
On peut enlever la partie proba si on manque de place.

Références : Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Faraut, *Calcul intégral*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*
Laamri, *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*
Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
Ouvrard, *Probabilités 1 et 2*
Foata, Franchi, Fuchs, *Calcul des probabilités*
Cottrell, *Exercices de probabilités*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*

Cadre : on veut étudier les propriétés d'intégrales du type $\int_X f(t,x)\mathrm{d}x$ pour $t \in E$.

I Théorèmes de régularité

1 Continuité

Faraut : le théorème de continuité (application du théorème de convergence dominée).
Hauchecorne : un contre-exemple.
Briane, Pagès : application à $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, le cas de la mesure de comptage, application à la continuité de la fonction Γ.

2 Dérivabilité

Faraut : le théorème de dérivabilité.
Hauchecorne : un contre-exemple.
Briane, Pagès : la version série, Γ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, le calcul de deux transformées de Fourier avec des équas diffs.

3 Holomorphie

Faraut : le théorème d'analyticité, le contre-exemple, le prolongement holomorphe de Γ.

II Produit de convolution

1 Définition du produit de convolution

Briane, Pagès : la déf générale (avec $f(.)g(x-.) \in \mathbb{L}^1$, cas où ça marche bien : L^1_{loc}-L^∞_c, L^p-L^q, convolution L^1-L^p + inégalité de Young, convolution L^1, structure d'algèbre, il n'y a pas d'unité.
Du coup, on va approximer cette unité ! =)

2 Approximations de l'unité et régularisation

Briane, Pagès : déf, exemples, propriété de déplacement des opérateurs différentiels, suites régularisantes, application à quelques résultats de densité.

III Transformée de Fourier

Les conventions sont à l'envers dans le Briane, Pagès, donc on modifie tout...

1 Transformée de Fourier sur L^1

Briane, Pagès : déf, propriétés, compatibilité avec la dérivation, TF de la gaussienne (avec variance et moyenne cette fois), compatibilité avec la convolution.
Faraut : quelques exemples avec les indicatrices.
Laamri : encore plus d'exemples !
Briane, Pagès : injectivité (admis), formule d'inversion, application au calcul de la TF de Cauchy et TF du produit, Fourier-Plancherel.

2 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

Zuily : déf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, exemples, petite propriétés, $\mathcal{F}$ est linéaire bijective bicontinue sur $\mathcal{S}$, toutes les propriétés précédentes marchent encore comme $\mathcal{S} \subset L^1$.
Rappels sur $\mathcal{S}'$, déf TF dans $\mathcal{S}'$, propriétés, ex du dirac et de $\mathbb{1}$, "changement de variable dans la TF" + conséquence sur les distrib paires, rappel de $vp(\frac{1}{x})$ + sa TF (à détailler).
Bony/Zuily : Solution élémentaire à l'équation de Schrödinger avec le lemme (en disant qu'on va utiliser des intégrales à paramètres pour en calculer une qui est dans $\mathcal{S}'$, on ne parle pas de convolution de distributions).

IV Intégrales à paramètre en probabilités

1 Fonction caractéristique

Barbe, Ledoux : définition de la fonction caractéristique, elle caractérise la loi, exemples.
Ouvrard 2 : moment d'ordre $n \Rightarrow \varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^n$, réciproque partielle. Contre-exemple avec φ_X dérivable en 0 mais X n'a pas de moment d'ordre 1, formules pour calculer les moments, la moyenne et la variance, cas où φ est analytique.
Barbe, Ledoux : critère d'analyticité, théorème des moments.
FFF : théorème de Lévy, exemple sur des lois normales.

2 Transformée de Laplace

FFF : déf de la transformée de Laplace (on la définit plutôt comme la fonction génératrice des moments.), elle caractérise la loi.
ex de transformées p165 en remplaçant les it des fonctions caractéristiques par x (ou Cottrell p162). Premières propriétés, analyticité, calcul des moments.

V Comportement asymptotique d'intégrales à paramètre

Rouvière : Méthode de Laplace, application à Stirling.
Zuily, Queffelec : méthode de la phase stationnaire (avec Morse, admis), application à la fonction d'Airy.

240 - Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

Remarques : Rapport du jury : "Cette leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires. Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou de l'opérateur $k^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouvent leur place ici mais sont réservées aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener."

Références : Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Faraut, *Calcul intégral*
Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
Ouvrard, *Probabilités 2*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*
Laamri, *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Willem, *Analyse harmonique réelle*
Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*

Cadre : On travaille sur $\mathbb{R}^d$ et on intègre avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

I Convolution

1 Définitions et propriétés de la convolution

But : chercher les bons espaces où ça déconne pas trop...
Briane, Pagès : déf pour les fcts positives, puis à valeurs dans $\mathbb{C}$, les propriétés avec le défaut de l'associativité et son contre-exemple dans le cas général.
Convolution L^1_{loc}-L^∞_c, L^p-L^q, convolution L^1-L^p + inégalité de Young, convolution L^1, structure d'algèbre, il n'y a pas d'unité.
Du coup, on va approximer cette unité ! =)

2 Approximations de l'unité et régularisation

Briane, Pagès : déf, exemples, convergence L^p, le cas L^∞.
Propriété de déplacement des opérateurs différentiels, suites régularisantes, application à quelques résultats de densité, fonctions plateaux (détailler la construction si on a la place + dessins).
Hirsch, Lacombe : application au théorème de Fréchet-Kolmogorov.
? : une preuve de Weierstrass.

3 Convolution de distributions

On remplace tous les ensembles convolutifs par tous compacts sauf 1.
Bony : déf E-D' et D-E', toutes les propriétés, contre exemples et manières de calculer (à la fin).

II Transformée de Fourier

Les conventions sont à l'envers dans le Briane, Pagès, donc on modifie tout...

1 Transformée de Fourier sur L^1

Briane, Pagès : déf, propriétés, compatibilité avec la dérivation, TF de la gaussienne (avec variance et moyenne), compatibilité avec la convolution.
Faraut : quelques exemples avec les indicatrices.
Laamri : encore plus d'exemples !
Briane, Pagès : injectivité (admis), formule d'inversion, application au calcul de la TF de Cauchy et TF du produit.

2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Zuily : déf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, exemples/contre-exemple, petite propriétés, $\mathcal{F}$ est linéaire bijective bicontinue sur $\mathcal{S}$, toutes les propriétés précédentes marchent encore comme $\mathcal{S} \subset L^1$.

3 Transformée de Fourier-Plancherel

Faraut : densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2, le lemme, théorème de Plancherel.
Briane, Pagès : la formule d'inversion.

4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Rappels sur $\mathcal{S}'$, déf TF dans $\mathcal{S}'$, propriétés, ex du dirac et de $\mathbb{1}$, "changement de variable dans la TF" + conséquence sur les distrib paires, rappel de $vp(\frac{1}{x})$ + sa TF (à détailler).

Gourdon, Willem, Lesfari : $\boxed{\text{Formule sommatoire de Poisson + corollaires}}$

III Applications

1 Séries de Fourier

Faraut : déf (e_n), noyau de Dirichlet, S_n, Dirichlet, Σ_n, Féjèr, application à Stone-Weierstrass trigonométrique, corollaire : (e_n) est une base hilbertienne.

2 Solutions élémentaires d'équations aux dérivées partielles

Bony : théorèmes d'existence/unicité p 150, déf TF partielle, solution élémentaire de la chaleur.

Solution élémentaire à l'équation de Schrödinger

3 La fonction caractéristique en probabilités

On fait tous les exemples pour des variables aléatoires à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, au vu de tout ce qu'on a fait auparavant.
Ouvrard : déf φ_X, théorème de Paul Lévy, critère d'indépendance, $\varphi_{X_1+X_2}$, moments.
Barbe, Ledoux : formule d'inversion et plein d'exemples, application au TCL.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Questions : $\rightarrow$ Le théorème de Borel donne que pour toute suite $(a_n)_n$ de nombres complexes, il existe une infinité de fonctions f de classe C^∞, d'une variable réelle et à valeurs complexes, définies au voisinage de 0, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n$.
Comment peut-on l'adapter pour une fonction de la variable complexe ?
Le théorème deviendrait : soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes, alors il existe une fonction f holomorphe définie sur un voisinage de 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n$ si et seulement si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. De plus si cette fonction existe, elle est unique ! (Puissance Holomorphe ! ! !)

$\rightarrow$ Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$.
On fait une transformation d'Abel : on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} \sin(nx)$, on a $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\sin(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{S_n - S_{n-1}}{n} = \dfrac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \dfrac{S_n}{n(n+1)}$. Or $S_N = \Im(\sum_{n=0}^{N} e^{inx}) = \Im(\dfrac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}) = \dfrac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$. Donc sur tout compact de $]0, 2\pi[$, S_n est bornée, d'où le résultat par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{S_n}{n(n+1)}$.

Remarques : Le rapport du jury est assez clair : "Une fois les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, série de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet."

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Queffelec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation*
Hauchecorne, *Contre-exemples en mathématiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Analyse 2*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Hardy, Wright, *An introduction to the theory of numbers*

I Étude des suites et séries de fonctions

1 Différentes convergences

Gourdon : déf CVS, CVU, l'une implique l'autre, contre exemple x^n.
Sur des espaces complets : critère de Cauchy uniforme, sur un evn la topologie de la cvu est celle de la norme infinie, CVN, CVN implique CVU.
Hauchecorne : une série qui CVU mais où il n'y a pas CVN.

2 Propriétés de la limite

Gourdon : continuité/dérivabilité de la limite (+corollaire dérivabilité en remarque), ex de l'exponentielle.
Hauchecorne : contre-exemple pour la dérivabilité de la limite.
Gourdon : Théorèmes de Dini (supposer des propriétés sur la limite donne des infos sur la convergence).
Zuily, Queffelec : Théorème de Weierstrass (résultat de densité).
Oraux X-ENS an 2 : théorème de sélection de Helly (propriété de suite extraite)

3 Quelques liens avec l'intégration

Briane Pagès : cv monotone/Beppo Levi, application 7.1, lemme Fatou, théorème de CV dominée, un petit contre-exemple du Hauchecorne, version série, exercice 8.11 sur $\int e^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x$, puis exercice 8.7 a.

II Séries entières et holomorphie

1 Définition, rayon de convergence

Gourdon : on cite les propriétés de base : définition, lemme d'Abel, rayon de convergence, CVN ... Exemples de exp, sin et cos que l'on peut définir comme des séries entières.
Hauchecorne : problèmes au bord : exemples
Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible

2 Régularité des séries entières

Passer rapidement ici : il s'agit juste de préciser que séries entières et holomorphie sont liées.
Zuily-Queffelec : holomorphe ssi analytique, les séries entières sont holomorphes sur leur disque de convergence.
Hauchecorne : on peut être définie sur tout le cercle de convergence sans être prolongeable, car non analytique en tout point du cercle.

III Séries de Fourier

Gourdon : Déf série trigonométrique, critère de cv par Abel, déf séries de Fourier, on rajoute que les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne, égalité de Parseval, corollaire de Dirichlet, théorème de CVN de la série de Fourier, ex d'application avec le calcul de $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.
Il existe des fcts continues différentes de leur série de Fourier avec Banach-Steinhaus. exemple avec ex 4 p 264. . Application ex 3 p 264, inégalité de Poincaré et on trouve la constante de Poincaré.
Zuily, Queffelec/Evans : Équation de la chaleur

IV Séries de Dirichlet

Zuily Queffelec : déf, abscisses de CV, de CVA, théorèmes de convergence, inégalités sur σ_c et σ_{ac}, holomorphie, exemple de la fonction ζ qui est holo sur $\Re > 1$, enfin mettre l'ex 6.
Hardy Wright : théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (utilise une série de Dirichlet), multiplication des séries de Dirichlet, application : $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Questions : $\rightarrow$ Si 0 est point d'accumulation de l'ensemble des zéros de $f : z \mapsto \sum a_i z^i$, alors $f = 0$.
Soit z_n suite tendant vers 0 avec $f(z_n) = 0$. $f(z) = z^p a_p(1 + zg(z))$ avec $p = \min\{n, a_n \neq 0\}$ supposé fini. g est développable en série entière. On a $1 + z_n g(z_n) = 0$. Or $z_n g(z_n) \rightarrow 0$ donc $1 = 0$! Absurde !
Donc $p = \infty$ et $f = 0$.
$\rightarrow$ On peut déplacer ce problème en z_0 sur le disque ouvert de convergence en redéveloppant la série autour de z_0.

$\rightarrow$ Et si z_0 est sur le bord ?
Ça ne marche plus ! Contre-exemple : $\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$, $R = 1$, $z_n = 1 - \dfrac{1}{n\pi}$
$\rightarrow$ Rayon de convergence de $\sum e^{n\sin(n)} z^n$?
On a $\limsup |e^{\sin(n)}| = e$ donc $R = \dfrac{1}{e}$.
Pour prouver la lim sup, on montre que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous groupe dense de $\mathbb{R}$, puis $\sin(\mathbb{Z}) = \sin(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.

$\rightarrow$ Montrer que si une série entière en 0 a un rayon de convergence $R > 0$, alors on peut redévelopper cette série en tout point du disque ouvert.
Utiliser le lemme d'Abel.

Remarques : Il faut insister sur la nécessité d'étudier les séries entières sur les complexes.
Dans le Gourdon, il n'y a pas la partie holomorphie, c'est à la fois un plus pour faire la comparaison avec la dérivabilité sur $\mathbb{R}$, et un moins car il ne faut surtout pas oublier l'holomorphie.
ATTENTION : une série peut converger sur tout le cercle de convergence et ne pas être prolongeable car elle n'est pas ANALYTIQUE en tous les points du cercle !

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Queffelec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation*
Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Hauchecorne, *Contre-exemples en mathématiques*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre 1*
Cartan, *Théorie élementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

I Définitions et premières propriétés

1 Séries entières, rayon de convergence

Gourdon : la définition (préciser que l'on se place sur $\mathbb{C}$ et qu'on verra à quel point c'est plus pratique que $\mathbb{R}$ plus tard), le LEMME D'ABEL sur lequel il faut insister. Puis déf du rayon de convergence.

2 Méthodes de calcul de R, applications à la définition de séries entières classiques

Gourdon : règles de D'Alembert, de Cauchy (+D'Alembert implique Cauchy)
On trouve les rayons de convergence des séries classiques suivantes : exp, sin, cos. On DÉFINIT ces fonctions avec les séries !
Amar Matheron : formule d'Hadamard ($R^{-1} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$) ; exemple sur $a_n = e^{n\cos(n)}$.

3 Opérations simples sur les séries entière

Gourdon : on présente la somme et le produit, les rayons de convergence de celles-ci : $R'' \geqslant \inf(R', R)$. On présente l'exemple $\sum \left(\frac{z}{R}\right)^n + 0$ où l'inégalité est maximale pour la somme, puis pareil pour le produit en multipliant par 1.
Préciser la ressemblance avec les séries formelles, et la différence sur le fait que les séries entières convergent. On a donc des propriétés de régularité que l'on n'avait pas sur les séries formelles.

4 Composition et inverses de séries entières

Cartan : substitution possible si $a_0 = 0$. L'inverse existe si $a_0 \neq 0$.

II Régularité des sommes

1 Continuité

Gourdon : continuité sur le disque ouvert de convergence, uniforme continuité sur les compacts du disque de convergence, application à exp, cos, sin.

2 Dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et liens avec le développement de Taylor

Gourdon : une série entière est $\mathcal{C}^1$, on connaît sa forme. Puis caractère $\mathcal{C}^\infty$ et expression des coefficients (donne l'unicité du développement). Application au caractère $\mathcal{C}^\infty$ de exp, cos et sin.
On reconnaît les séries de Taylor, on en déduit qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière au point x ssi le reste intégral tend vers 0 sur un voisinage de ce point.
Application au calcul des développements en série entière de $(1+x)^\alpha$.
Contre-exemple de $e^{-\frac{1}{x}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ dont la série entière est nulle et le reste intégral ne tend pas vers 0.

3 Primitives

Gourdon : primitive d'une série entière, même rayon de convergence.
Application : calcul des séries entières $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$.

4 Liens avec les fonctions holomorphes

Zuily-Queffelec : la somme d'une série entière est holomorphe sur son disque de convergence. Elle est aussi analytique (préciser les définitions dans les deux cas). Réciproquement, une fonction holomorphe est analytique.
Exemple : on ne pouvait pas développer $e^{-\frac{1}{x}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ car son prolongement sur $\mathbb{C}$ n'est pas holomorphe (même pas continu en fait).
Bayen, Margaria : application : espace de Bergman
Zuily, Queffelec : principe des zéros isolés.
Gourdon : formule de Cauchy et application au théorème de Liouville et aux inégalités de Cauchy (dans ZQ) ; égalité de Parseval

III Problèmes au bord

Zuily Queffelec : il existe une série entière qui CVU sur $\overline{D}$ et ne CV pas normalement dans $\overline{D}$.
Pts réguliers/ points singuliers, il y a tjs au moins un point singulier ! ex : $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ avec 1 unique point singulier.
Hauchecorne : série convergeant sur tout le cercle de convergence mais pas prolongeable car pas analytique sur tout le cercle ! Série qui diverge sur tout le cercle, série qui fait des trucs bizarres sur le cercle.

Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

IV Quelques applications des séries entières

1 Développement de fonctions rationnelles en séries entières

Gourdon : méthode sans vérifier que le reste intégral tend vers 0.
Bien insister que c'est la même chose que les fractions rationnelles, le même problème si 0 est un pôle.

Application : partitions d'un entier en parts fixées (en insistant vraiment sur les rayons de convergence...).
FGNan2 : DSE des fractions rationnelles et lien avec les suites récurrentes linéaires.

2 Développement en série entière via la résolution d'équations différentielles

Avantage sur les séries formelles : plus simple. On peut utiliser la théorie des EDO sans intuiter la solution et multiplier par ce qu'il faut pour trouver laborieusement un truc du genre $f' = 0$.
Gourdon : Exemple : exo 3 p242 : on dit que la fonction est développable en série entière par des arguments sur les développements connus. Puis on trouve une équa diff et on met la série entière dedans.

3 Séries génératrices

Franchement c'est plus en lien avec les séries formelles... Mais bon...
FGNal1 plein de trucs

244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Questions : $\rightarrow$ DSE de $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$ en 0

$\rightarrow$ Démontrer le lemme de Bernstein.

Remarques : il ne faut pas trop parler de fonctions holomorphes. Ce n'est pas hors-sujet, mais il vaut mieux rester sur l'analyticité.

Références : Pommellet, *Agrégation de mathématiques - Cours d'analyse*
Queffelec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

I Développement en série entière, analyticité sur $\mathbb{R}$

1 Généralités, régularité de la somme

Pommellet : lemme d'Abel, rayon de convergence, convergence normale, exemple de l'exponentielle que l'on définit.
Série dérivée, une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et holomorphe sur $\mathbb{C}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Exemple de la série $\sum z^n$ qui se dérive en $\sum \binom{n+p}{p} z^n$. (plus loin dans le Pommellet)

2 Développement en série entière, réelle analyticité

Gourdon : DSE, CNS du DSE sur $\mathbb{R}$: le reste intégral tend vers 0, contre exemple avec $e^{\frac{-1}{x}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$, DSE des fonctions usuelles (adapter sur $\mathbb{C}$)
Condition nécessaire d'analyticité sur $\mathbb{R}$: le reste intégral tend vers 0 en tout point concerné.
Cartan : une condition suffisante pour être réelle analytique.
Gourdon : le théorème de Bernstein

II Analyticité sur $\mathbb{C}$

1 Analyticité et holomorphie

Pommellet : déf dérivabilité complexe, analytique implique holomorphe, analytique implique $\mathcal{C}^\infty$.
Formule de Cauchy et ses dérivations, holomorphe implique analytique. formule de Cauchy, holo implique analytique, du coup équivalence holo analytique. En particulier, une série entière est analytique sur son disque de convergence.
Bayen, Margaria : application : Espace de Bergman

2 Prolongement analytique

Pommellet : principe des zéros isolés, prolongement analytique.
OA : ex 2.2 : une application et le contre exemple $\sin(\dfrac{\pi}{1-z})$.
Calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne.
ZQ : prolongement analytique de Γ sur le demi plan $\{\Re(z) > 0\}$.

3 Comparaison entre analyticité sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Sans référence : analyticité sur $\mathbb{C}$ implique analyticité sur $\mathbb{R}$.
En remarque, sur $\mathbb{R}$, être $\mathcal{C}^\infty$ ne suffit pas à être analytique, alors que sur $\mathbb{C}$, être dérivable est suffisant !
OA (p 55) : prolongement holo d'une fonction analytique réelle, conséquence : les fonctions analytiques réelles sont les restrictions de fonctions analytiques complexes !
On a donc encore le principe des zéros isolés et le prolongement analytique sur $\mathbb{R}$.

III Problèmes au bord

Pommellet : déf point régulier/singulier, il y a toujours une singularité sur le bord du disque.
ZQ (p 51) : ça ne veut pas dire qu'on ne peut pas prolonger ! On a l'exemple de $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ dont la somme est définie sur le disque fermé et il y a un prolongement continu de cette série sur tout $\mathbb{C}$. Ce que l'on ne peut faire, c'est un prolongement **analytique**.
Théorème des lacunes de Hadamard, théorème de Steinhaus (?)
Gourdon : Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

IV Quelques applications des séries entières

1 Résolution d'équations différentielles

Pommellet : méthode générale + équation de Bessel
ZQ : p 408, solution des équations de Sturm à coefficients développables en série entière.

2 Dénombrement

FGNal1 : nombres de dérangements, de Bell
FGNan2 : $\boxed{\text{partitions d'un entier en parts fixées}}$

245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Remarques : Rapport du jury : "Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète). Pour les candidats aguerris, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan."

Références : Amar, Matheron, *Analyse complexe*
Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

I Définition de l'holomorphie, exemples

1 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$, holomorphie

Amar, Matheron : déf $\mathbb{C}$-dérivabilité, f est $\mathbb{C}$-dérivable en a ssi elle est différentiable en a et $Df(a)$ est une similitude directe (càd la multiplication par une constante), équations de Cauchy-Riemann (écrire la jacobienne en faisant l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pour bien faire voir la similitude).
Déf holomorphe, équations de Cauchy-Riemann réécrites, déf $\mathcal{H}(\Omega)$.

2 Exemples et contre-exemples fondamentaux

Amar, Matheron : l'identité, stabilité de la $\mathbb{C}$-dérivabilité par les opérations usuelles, exemple des polynômes. Le conjugué, les parties réelles et imaginaires ne sont pas holomorphes.
L'exemple fondamental des séries entières, leurs dérivées, exemple de l'exponentielle, du sinus et du cosinus complexes.
Déterminations principales de l'argument puis du logarithme (+dessins), propriété d'holomorphie, application aux racines k-ièmes.

II Formule de Cauchy et conséquences

1 La formule de Cauchy

Amar, Matheron : déf chemin, lacet, intégrale curviligne, compact à bord régulier, dessins, déf intégrale dessus.
Le théorème de Cauchy (avec Stokes, admis), $\dfrac{1}{z-a}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, formule de Cauchy (on dit qu'on peut définir l'indice et améliorer ainsi cette formule, mais que c'est bien compliqué. On pourra en parler pendant les questions), application au calcul de l'intégrale de $\dfrac{1}{z-a}$.
Une fonction holo est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, formule de Cauchy pour les dérivées, formule de la moyenne + interprétation.

2 Analyticité des fonctions holomorphes et applications

Amar, Matheron : propriété d'analyticité des fonctions holomorphes (en remarque c'est faux sur $\mathbb{R}$, exemple de e^{-1/x^2}, la CNS sur $\mathbb{R}$ est que la fonction soit prolongeable en une fonction holomorphe sur un ouvert autour de son ensemble de déf), les coefficients sont ceux du dvp de Taylor.
Saint Raymond : le rayon de convergence de la série en a est exactement $d(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$, ex de l'exponentielle, de $\dfrac{1}{1-z}$.

Si f et toutes ses dérivées s'annulent en un point, alors $f = 0$ sur la composante connexe concernée, prolongement analytique, principe des zéros isolés, $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation et est au plus dénombrable.

3 Inégalités de Cauchy et applications

Saint Raymond/Amar, Matheron : les inégalités de Cauchy, théorème de convergence de Weierstrass, application à la définition de ζ sur $\{\Re(z) > 1\}$.
Théorème de Liouville, application à D'Alembert-Gauss.
Théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre, application à la définition de Γ sur $\{\Re(z) > 0\}$.

4 Le principe du maximum

Amar, Matheron : le principe du maximum, le corollaire, en remarque : cela permet de retrouver D'Alembert-Gauss.

III Fonctions méromorphes, exemples et applications

1 Singularités isolés et séries de Laurent

Saint Raymond : les différentes singularités.
? : des exemples simples ($\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ pour la singularité essentielle)... [2]
Amar, Matheron : déf série de Laurent + la CVN, théorème de Casorati-Weierstrass.

2 Fonctions méromorphes, exemples

Amar, Matheron : déf, prolongement méromorphe de Γ et ζ.

3 Théorème des résidus, application au calcul d'intégrales

Amar, Matheron : théorème des résidus, exemple si f holo ou $f = \frac{1}{z}$, la formule du résidu quand on connaît l'ordre du pôle.
Calcul de $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^6} \mathrm{d}t$ + dessin, méthode pour les intégrales de Fourier + exemple.
Application : $\boxed{\text{Formule des compléments}}$, prolongement méromorphe de ζ.

IV Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$

Amar, Matheron/Saint Raymond : déf des suites exhaustives de compacts, des p_K et de la distance métrisant $\mathcal{H}(\Omega)$, ça marche grâce au théorème de convergence de Weierstrass, c'est un espace complet, tous les théorèmes réécrits (avec le théorème de Montel).
Bayen, Margaria : $\boxed{\text{Espace de Bergman}}$.

2. Bien sur, il est insurmontable pour les écrivains de bouquins d'analyse complexe de mettre des exemples. "Vous comprenez, si on le faisait, nos lecteurs pourraient comprendre nos livres. Ce serait terrible !"

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

Remarques : rapport du jury : "Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet, ...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues).
Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet.
Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.
La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon."

Références : Faraut, *Calcul intégral*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*
Evans, *Partial differential equations*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Willem, *Analyse harmonique réelle*
Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*

Intro physique : on met l'équation de la chaleur, des ondes. On parle de phénomènes périodiques. Le but est d'approximer une fonction pour différentes normes par des polynômes trigonométriques.
Cadre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période T.

I Définition de la série de Fourier d'une fonction périodique intégrable

1 Définitions et notations

Faraut : On se place sur $L^2_T(\mathbb{R})$, le produit scalaire, déf (e_n), c'est une famille orthonormale, déf $c_n(f)$ si $f \in L^1$, déf S_N, c'est la série de Fourier, sa convergence et on précise que ce n'est pas la convergence habituelle de série.
$\displaystyle\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a, autre déf de c_n, déf des a_n et b_n.

2 Propriétés des coefficients de Fourier

Zuily, Queffelec : toutes les petites propriétés en rajoutant $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$, lemme de Riemann-Lebesgue, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
Gourdon : propriétés sur les a_n et b_n.

3 Des exemples

Zuily, Queffelec : des exemples de séries de Fourier. On détaille certains calculs.

II Différentes convergences

1 La base hilbertienne de Fourier et la convergence L^2

Hirsch, Lacombe : l'inégalité de Bessel, le théorème de Bessel-Parseval, (e_n) est une base hilbertienne (admis pour l'instant), $(\sqrt{2}\cos(2\pi x/T))$ et $(\sqrt{2}\sin(2\pi x/T))$ le sont aussi, l'égalité de Parseval, application : $f = \lim S_N(f)$ dans L^2 !!!
Gourdon : l'égalité de Parseval pour les coefficients réels.

2 Convergences ponctuelle et uniforme

Faraut : les deux critères de CVU (le corollaire est formulé bizarrement), l'application/contre-exemple.
Théorème de Dirichlet, déf $\mathcal{C}^k$ par morceaux, ça n'implique pas la continuité, le cas $\mathcal{C}^1$ par morceaux du théorème, des exemples en exercice.
Zuily, Queffelec : on reprend les exemples de la première partie et on donne leur convergence.
Faraut : le phénomène de Gibbs.
Objectif agrégation : le dessin associé.

3 Convergence au sens de Cesàro

Faraut : déf Σ_N, le noyau de Fejér, théorème de Fejér, densité de polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.
Objectif agrégation : donc densité dans les $L^p(\mathbb{T})$ $(p \neq \infty)$ car la mesure de Lebesgue est finie sur $\mathbb{T}$ et on a densité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dans $L^p(\mathbb{T})$, corollaire : (e_n) est totale.

III Applications

1 Calcul de sommes et de séries, applications

Zuily, Queffelec/Faraut : utilisation des théorèmes et séries de Fourier précédents pour calculer des sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ + les graphes des fonctions associées. On en met d'autres si on en trouve...
Gourdon/Willem/Lesfari : Formule sommatoire de Poisson + corollaires.

2 Régularité de la fonction et des coefficients

Zuily, Queffelec : le théorème de régularité liant les propriétés de f et celles des coefficients de Fourier.

3 Résolution d'équations aux dérivées partielles sur des domaines simples

Zuily, Queffelec/Evans : le concept de solution stationnaire, Équation de la chaleur, c'est pour la résoudre que toute la théorie des séries de Fourier a été inventée.
On pourrait résoudre de même l'équation des ondes ou l'équation de Laplace.

4 Inégalités en analyse

Brézis : Inégalité de Poincaré-Wirtinger avec constante optimale en dimension 1.
Zuily, Queffelec : inégalité isopérimétrique.

247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Questions : $\rightarrow$ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

$\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}\mathrm{d}x$ car $\displaystyle\frac{(-x\ln(x))^n}{n!} \leqslant \frac{C}{n!}$ sur $[0,1]$.

Puis on pose $J_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 x^i \ln(x)^j \mathrm{d}x$, on fait une IPP pour trouver $J_{i,n} = (-1)^n \dfrac{n!}{(i+1)^{n+1}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

$\rightarrow$ DSE de $I(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

I est bien définie car en 0, le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x < 1$. Puis $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} t^{x-1}\mathrm{d}t =$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)}$

Remarques : La ressemblance avec la leçon 235 est assez perturbante. Je pense qu'il faut bien faire attention aux différences entre ces deux leçons. La plupart des concepts marchent mais pour ce qui est des interversions limite et intégrale, le lien est plus faible... Pour les mettre dedans, il ne faut présenter que des exemples d'intégrales sur des domaines non bornés où on peut bien faire croire à une interversion de limites.
Le chapitre consacré du Pommellet contient à peu près tout le plan.

Références : Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
Pommellet, *Cours d'analyse*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*

I Premiers théorèmes d'interversion

1 Limite et convergence uniforme

Gourdon/Pommellet : continuité de la fonction limite, le premier thm d'interversion des limites, premier théorème d'interversion limite/intégrale, corollaire sur les séries, dérivabilité de la limite (version $\mathcal{C}^p$ à l'oral), version série + application à la série exponentielle.

2 Le cas des séries entières

Gourdon : lemme d'Abel, régularité + holomorphie (on peut passer à la limite dans tout le cercle de convergence), rajouter la formule de Cauchy pour une interversion intéressante qui est la base de tout.
Problèmes au bord, théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible + exemples

3 Fonctions de plusieurs variables

Pommellet : exemple pathologique de $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ dont les limites sont un peu bizarres (on ne peut pas écrire $\lim_{(x,y)\to 0}$), si les dérivées partielles existent et sont continues, alors la fonction est différentiable, puis théorème de Schwarz.

II Problèmes de limites en théorie de la mesure

1 Intégrales de suites de fonctions positives

Briane Pagès : cv monotone, $\int f \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f$ nulle pp, application au calcul de la limite de $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x$.
Lemme de Fatou, si $\sup \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, application pour l'intégrale de la dérivée, contre exemple de l'escalier de Cantor, lemme de Fatou amélioré.

2 Théorème de convergence dominée

Briane Pagès : Convergence dominée, remarque avec $\frac{f(x+n)}{n}$ pour dire que ce théorème ne résout pas tous les problèmes, puis intégration d'une dérivée (suite).
Version série de fonctions, lemme de Borel-Cantelli, continuité de l'intégrale par rapport à la mesure.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman

3 Intégrales à paramètre

Briane Pagès : (à l'oral : applications du thm de CV dom) continuité, dérivabilité (version holomorphe à l'oral), application à Γ et à la régularité de la transformée de Fourier, transformée de Fourier de la gaussienne.
Rouvière : Méthode de Laplace, application à Γ.

III Interversions d'intégrales

Briane Pagès : les théorèmes, les contre-exemples moches, puis adaptation du théorème aux séries doubles. (dans la partie changement de variables du bouquin) exemple de $\int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\mathrm{d}x$.
On rajoute la convolution et l'inversion de Fourier en corollaires.
Gourdon : ex4 : $\sum(\zeta(k)-1)=1$ pour les sommes doubles.
Puis produit de Cauchy, théorème, exemple.

→ Rajouter PLEIN de contre-exemples du Hauchecorne un peu partout.

249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

Remarques : Rapport du jury : "La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite) doivent être rappelés. La loi binomiale doit être évoquée et le lien avec la leçon expliqué.
Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations."

Références : Ouvrard, *Probabilités 1 et 2*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*
Dupont, *Probabilités et statistiques pour l'enseignement*
Bercu, Chafaï, *Modélisation stochastique et simulation*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*

I Comment obtenir une suite de Bernoulli indépendantes ?

1 Les variables aléatoires de Bernoulli

Dupont : modélisation, loi, moyenne et variance.
Bercu-Chafaï : on sait simuler des lois uniformes par congruence, modélisation de la loi de Bernoulli.

2 Rappels sur l'indépendance

Barbe, Ledoux : déf évènements indépendants, mutuellement indépendants, exemple et contre exemple avec les dés, déf variables aléatoires indépendantes, le premier exemple.
? : théorème des coalitions.

3 Une construction d'une suite de Bernoulli indépendantes

Ouvrard 2 (p 53) : concrètement, cela revient à faire des tirages à pile ou face.
Obtenir une suite finie revient à projeter, mais ça n'est plus si évident pour une suite infinie. On met le théorème de Kolmogorov en admis.
Modélisation de suites de variables aléatoires indépendantes, on fait le corollaire pour des lois uniformes et on l'applique à l'existence d'une suite de variables de bernoulli de paramètre non 1/2 (en posant $\mathbb{1}_{U_i<p}$).

II Liens entre les variables de Bernoulli et quelques autres lois

1 Loi de Rademacher

Déf Rademacher, si $X \sim b(1/2)$ alors $2X - 1$ suit une loi de Rademacher.

2 Loi binomiale

Dupont : la déf, le graphe, espérance et variance, si $X_i \sim b(p)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$, la modélisation associée.

3 Loi géométrique

Dupont : la déf, le graphe, espérance et variance, si $X_i \sim b(p)$ sont iid alors $\min\{i|X_i = 1\} \sim \mathcal{G}(p)$, la modélisation associée.

4 Loi binomiale négative

Ouvrard 1 : déf de la loi binomiale négative, sa modélisation, espérance, variance.

5 Loi hypergéométrique

Ouvrard 1 : on tire des boules dans des urnes (d'où les bernoulli qui interviennent), espérance, variance.

6 Loi de Poisson

Dupont : la déf, le graphe, espérance et variance, la modélisation associée.
Ouvrard 2 : théorème des évènements rares de Poisson, application au théorème de Poisson.

III Quelques applications

1 Recherche du paramètre d'une loi de Bernoulli

Dupont : estimation du paramètre d'une Bernoulli par étude du maximum de vraisemblance.
Barbe, Ledoux : LGN faible et forte appliquées au pile ou face.
Cadre, Vial : application : la moyenne empirique est un estimateur fortement consistant.
Ouvrard 1 : le théorème de Moivre-Laplace, remarque sur Berry-Esseen (admis).
Cadre, Vial : intervalle de confiance de la moyenne empirique pour le pile ou face (on utilise l'estimateur trouvé par la méthode du maximum de vraisemblance.).

2 Une application en analyse

Zuily, Queffélec : $\boxed{\text{Stone-Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$

3 Marches aléatoires

Barbe, Ledoux : déf marche aléatoire, ex de la marche sur $\mathbb{Z}$ avec des lois de Rademacher, transience/récurrence du point 0.

4 Le problème de la ruine du joueur

Ouvrard 2 : déf du problème, de T, ρ, puis on donne $\mathbb{E}[T]$ et ρ. (ne mettre que si on maîtrise)

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Questions : → Les normes sont-elles strictement convexes ?
Non, par exemple la norme infinie dans $\mathbb{R}^2$

→ Pourquoi les fonctions convexes réelles sont-elles lipschitziennes sur tout compact ?
On se donne un sous intervalle $[a,b]$ de notre intervalle de définition et un compact $[c,d] \subset [a,b]$. Soient x, y dans $[c,d]$. Alors $\underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}_{k_1} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \underbrace{\frac{f(b)-f(d)}{b-d}}_{k_2}$. Donc $|f(y)-f(x)| \leqslant \max(k_1,k_2)\,|y-x|$.

→ Comment trouver le projeté d'un point sur une ellipse ?
On prend x un point, on note y son projeté (existe car blabla). Alors $x-y \perp T_{\mathcal{E}}(y)$ et $y \in \mathcal{E}$. On connaît l'équation d'une tangente à une ellipse. On résout, on obtient deux solutions et on prend la plus proche de x.

Remarques : Cette leçon est faite en hommage aux cours de Rozenn Texier-Picard.

Références : Tauvel, *Géométrie*
Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle*
Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
Ouvrard, *Probabilités 2*
Brézis, *Analyse fonctionnelle*
Hirsch, Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*
Chambert-Loir, *Analyse 1*
Hiriart-Urruty, Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I*
Chambert-Loir, *Analyse 1*

I Principaux résultats sur les ensembles et fonctions convexes

1 Ensembles convexes

• Tauvel : déf d'une combinaison convexe, reformulation en terme de barycentres, déf étoilée, convexe. A convexe ssi toute combinaison convexe de points de A est dans A.
• Tauvel : déf de enveloppe convexe, théorème de Gauss-Lucas, petites propriétés, contre exemple pour dire que l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas toujours fermée, théorème de Carathéodory, appli sur les cas compact et borné.

2 Fonctions convexes, caractérisations

HUL : • on fait tout pour les fonctions convexes à plusieurs variables en précisant à l'oral ce que cela donne en une variable.
déf fonction convexe, strictement convexe, fortement convexe, épigraphe et propriété de convexité (+ dessin), ex de $\frac{1}{2} < Ax, x >$ qui est fortement convexe et de quelques normes sur $\mathbb{R}^2$ + dessins.
• caractérisation avec la différentielle, en dim 1 cela veut dire f' croissante, dessins, elles ne sont pas toutes différentiables, ex bidon de $|x|$, puis les fonctions convexes sont différentiables pp.
• théorème si la dérivée seconde existe, f peut être strictement convexe avec une différentielle seconde semi définie positive, ex $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.
Hiriart-Urruty : $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ est fortement convexe ssi A est définie positive, de plus on connaît la constante de forte convexité, (Ax, x) est donc coercive.

II Inégalités de convexité et applications

1 Quelques inégalités classiques

Rombaldi : inégalité de Young (application à Hölder à l'oral), inégalité sur sin + dessin, Jensen $\sum$ et $\int$.
Rouvière : inégalité arithmético-géométrique par convexité de exp et application à la mise en boite à peu de frais.
Hirriart-Urruty : inégalité de Kantorovitch, méthode du gradient à pas optimal.

2 Inégalités dans les L^p

Briane Pagès : Hölder, inclusion topologique des L^p, Minkowski, les L^p sont des evn.

3 Inégalités en probabilités

Ouvrard : Jensen version proba, Inégalité de Hoeffding + application.

III Quelques applications de la convexité en analyse fonctionnelle et en optimisation

1 Séparation et projection des convexes

• Brézis : sur un evn, Hahn-Banach géométrique + déf séparation de convexes, critère de densité (équivalent du critère sur les Hilbert par dualité), application ? ? ? (sur un evn pas Hilbert !)
• Hirsch-Lacombe : sur un Hilbert, théorème de projection avec caractérisation, $E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$, critère de densité, application aux bases hilbertiennes.
Brézis : théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram.
Application à la résolution des problème de Dirichlet et Neumann homogènes.

2 Convexité et extrema

? : si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.

FGNal3 : log-concavité du déterminant, ellipsoïde de John-Loewner.

3 Théorèmes de points fixes sur les convexes

Rouvière : Newton cas convexe ($f'' > 0$), théorème de point fixe sur les convexes compacts, point fixe de Brouwer.
Chambert-Loir : Théorèmes de Schauder et de Cauchy-Arzela-Peano

254 - Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarques : Rapport du jury : "Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes. Elles se placent au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Par contre, on attend du candidat qu'il comprenne le rôle fondamental joué par la dualité dans la définition des opérations sur les distributions tempérées. Il faut aussi savoir faire le lien entre décroissance de la transformée de Fourier et régularité de la fonction.
Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre.
Le passage à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ repose sur l'idée de dualité qui est le cœur de cette leçon. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ et d'autres liées à la théorie des distributions comme la détermination de la transformée de Fourier d'une constante.
Cette leçon ne doit pas se réduire à une dissertation abstraite sur le dual topologique d'un espace de Fréchet séparable. Le candidat doit maîtriser des exemples comme la valeur principale, pouvoir calculer leur dérivée et comprendre ce qu'est la transformée de Fourier d'une fonction constante.
Les candidats ambitieux peuvent par exemple déterminer la transformée de Fourier de la valeur principale, la solution fondamentale du laplacien, voire résoudre l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

Références : Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*
Laamri, *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*
Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*
Willem, *Analyse harmonique réelle*
Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*

I Espace de Schwartz et distributions tempérées

1 L'espace de Schwartz

Zuily : déf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, ex de la gaussienne + des contre exemples à inventer pour prouver que les inclusions sont strictes, c'est un espace vectoriel, stabilité par produit et convolution, stabilité en multipliant par un polynôme ou en dérivant, $\mathcal{S} \subset L^p$.
Semi-normes, propriété de complétude (on rappelle que $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas normable.), densité de $\mathcal{C}_0^\infty$

2 L'espace des distributions tempérées

Zuily : déf $\mathcal{S}'$, rappel sur $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$, ex de δ, $L^p \subset \mathcal{S}'$ (en rajoutant la preuve rapide), stabilité par multiplication par un polynôme, majoré par un polynôme implique est dans $\mathcal{S}'$ + contre exemple.
Dans les ex de la TF sur $\mathcal{S}'$, il y a la preuve que $\mathrm{vp}(1/x)$ est dans $\mathcal{S}'$. On met l'inégalité le montrant.
Bony : e^x n'est pas dans $\mathcal{S}'$ (à retenir !!!), le cas de $\sum a_k\delta_k$.
Convergence dans $\mathcal{S}'$, condition pour que $a_k\delta_k \to 0$ dans $\mathcal{S}'$ (différence avec $\mathcal{D}'$).
$\to$ Dessin partiel de la fin du Bony en annexe.

3 Quelques rappels sur la dérivation et la convolution

• La dérivation :
Zuily : rappel rapide sur la dérivation dans les distributions, ex de $\delta^{(k)}$, stabilité par dérivation de $\mathcal{S}'$, exemple de $e^x e^{ie^x}$, continuité de la dérivation.

• La convolution :
On remplace tous les ensembles convolutifs par tous compacts sauf 1. Tout est dans $\mathcal{E}'$ donc c'est un peu hors-sujet... Mais bon on s'en sert après donc ça passe !
Bony : rappeler la déf de la convolution d'une distribution et d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, déf simple de la toute fin, toutes les propriétés, contre exemples et manières de calculer.

II Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Zuily : déf TF, on peut faire passer toutes les dérivées dans l'intégrale, exemple de la gaussienne, $\mathcal{F}$ est linéaire bijective bicontinue sur $\mathcal{S}$, toutes les propriétés.
Gourdon/Willem/Lesfari : Formule sommatoire de Poisson + corollaires.

2 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Zuily : déf TF dans $\mathcal{S}'$, propriétés, ex du dirac, de $\mathbb{1}$, de la gaussienne + sa généralisation à $e^{i(Bx,x)}$, "changement de variable dans la TF" + conséquence sur les distrib paires, TF de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$, application au calcul de $\mathcal{F}(H)$.
Comme $L^p \subset \mathcal{S}'$ et que les déf coïncident, on en déduit à peu près tous les résultats de la TF sur L^1 et L^2.
Laamri : plein d'exemples de TF sur L^1.

III Application aux solutions élémentaires d'EDP

Zuily : compatibilité de la TF avec la convolution.
Bony : théorèmes d'existence/unicité p 150, déf TF partielle, solution élémentaire de la chaleur.
Solution élémentaire à l'équation de Schrödinger

260 - Espérance, variance et moments de variables aléatoires.

À rajouter : espérance conditionnelle

Remarques : Rapport du jury : "Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite).
Le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié.
La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée."
Toutes les espérances, variances et densité des lois usuelles sont à la fin du Ouvrard 1 (enfin, il en manque certaines. On peut les trouver à la page 27 de Ouvrard 2, mais c'est bien caché.).

Références : Ouvrard, *Probabilités 1 et 2*
Foata, Franchi, Fuchs, *Calcul des probabilités*
Cottrell, *Exercices de probabilités*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*

I Espérance d'une variable aléatoire

1 Définition rapide de l'espérance

À l'oral : on répète rapidement la construction de l'intégrale contre une mesure, et on dit qu'on ne la construit pas ici.
Barbe, Ledoux : déf espérance, c'est la moyenne, ex d'une va constante, déf va centrée, thm de transport en rappelant ce qu'est $\mathbb{P}_X$, application à $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$.
Inégalités de Jensen, de Markov, espérance de vecteurs aléatoires.
Ouvrard 1 : espérance du produit de va si on a indépendance.

2 Espérances des lois usuelles

Ouvrard 1 : espérance d'une va discrète, exemple de la loi uniforme, de la loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.
Espérance d'une va à densité, exemples de la loi uniforme, la loi normale, loi exponentielle et contre-exemple de Cauchy.

II Moments de variables aléatoires

1 Moments d'ordre p, espaces L^p

Ouvrard 2 : déf L^p et L^∞ (en rajoutant le quotient pp dès le départ), inégalités de Hölder et Minkowski, L^p est un evn, inclusion des L^p.
Barbe, Ledoux : le critère d'intégrabilité avec la formule de $\mathbb{E}[X^p]$.

2 Variance et covariance, exemples

Barbe, Ledoux : déf variance, réduite, l'autre expression, cas de la variance nulle, $\mathrm{Var}(aX+b)$, inégalité de Tchebychev, de Cauchy-Schwarz.
Application : Stone-Weierstrass par les polynômes de Bernstein.
Ouvrard 1 : variance des lois de Bernoulli, de Poisson, géométrique, uniforme, normale, exponentielle, contre-exemple de la loi de Cauchy.
Ouvrard 2 : L^2 est un Hilbert, déf covariance (le produit scalaire), $\mathrm{Var}(X+Y)$.
Barbe, Ledoux : matrice de covariance des vecteurs aléatoires, ex de $\mathcal{N}(0, I_n)$ avec sa densité.
Ouvrard 2 : la matrice de covariance de $Ax+b$.

3 Moments, corrélation et indépendance

Barbe, Ledoux : une famille de va (X_i) est indépendante ssi $\prod \mathbb{E}[f_i(X_i)] = \mathbb{E}[\prod f_i(X_i)]$ pour toutes fonctions f_i bornées mesurables, variance du produit de va indépendantes, déf non corrélation (orthogonale pour L^2), indépendantes implique non corrélées, contre exemple, la réciproque est vraie pour les vecteurs gaussiens, identité de Bienaymé, application à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Ouvrard 1 : application à la variance d'une loi binomiale.
Application : coefficient de corrélation et droite de régression.

III Quelques utilisations

1 Fonctions caractéristiques

Barbe, Ledoux : définition de la fonction caractéristique, elle caractérise la loi, exemples.
Ouvrard 2 : moment d'ordre $n \Rightarrow \varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^n$, réciproque partielle. Contre-exemple avec φ_X dérivable en 0 mais X n'a pas de moment d'ordre 1, formules pour calculer les moments, la moyenne et la variance, cas où φ est analytique.
Barbe, Ledoux : critère d'analyticité, théorème des moments.
Ouvrard 2 : critère d'indépendance, loi de $X+Y$, exemples, contre exemple de lois vérifiant $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ et non indépendantes (p 228).
FFF : théorème de Lévy, exemple sur des lois normales.

2 Transformée de Laplace

FFF : déf de la transformée de Laplace (on la définit plutôt comme la fonction génératrice des moments.), elle caractérise la loi.
ex de transformées p165 en remplaçant les it des fonctions caractéristiques par x (ou Cottrell p162). Premières propriétés, analyticité, calcul des moments, critère d'indépendance, loi de $X + Y$, exemples.
Ouvrard : Inégalité de Hoeffding + critère de CV ps

3 Fonction génératrice

Ouvrard 1 : les propriétés de la fonction génératrice, exemples.

4 Théorèmes limites et statistique

Barbe, Ledoux : LGN forte (admis).
Cadre, Vial : application : on montre ainsi que la moyenne empirique est un estimateur fortement consistant, application à la méthode des moments, variance empirique, variance empirique corrigée, consistance (dans les exos).
Barbe, Ledoux : TCL, exemple poissonien.
Cadre, Vial : application au calcul d'intervalles de confiance, exemple du pile ou face.

261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Questions : → Généralisation du TCL ?
Condition de Lindeberg

→ Si une variable aléatoire a une fonction caractéristique intégrable, que peut-on dire ?
Par la transformée de Fourier inverse, c'est une variable à densité.

Remarques : Pour ne pas perdre trop de place, il est malin de regrouper les théorèmes donnant des propriétés similaires sur la fonction caractéristique et la transformée de Laplace.
On prend plutôt la fonction génératrice des moments à la place de la transformée de Laplace. Il faut préciser que c'est la même à changement de variable près.
La fonction caractéristique est une transformée de Fourier !

Conseils Breton : 1) Opérations sur les fonctions caractéristiques Ref : Lukacs, Chap. 2.
2) Lois arithmétiques (lattice distributions en anglais) Ref : Lukacs, Chap. 2.
3) Amincissement de lois, lois de Poisson composé Ref : Bercu, Chafaï, "modélisation stochastique et simulation", p ;44
4) Lemme de Stein : Une variable aléatoire X suit la loi N(0,1) ssi E[f'X)]=E[Xf(X)] pour assez de fonction f. Je n'ai pas de références classiques pour ce résultat. Cependant le livre (de recherche) I. Nourdin, G. Peccati "Normal approximation with Malliavin calculus" qui brode autour de ce thème contient une preuve simple de ce lemme en p.60.
5) Infini-divisibilité : Ref : Lukacs, Chap. 5. ou Barbe, Ledoux, p.113
6) Theorème de Bernstein : si X Y sont des variables iid telles que X+Y est indépendantes de X-Y alors X, Y suivent des lois normales. Ref : Ouvrard 2, p.271

Références : Ouvrard, *Probabilités 2*
Foata, Franchi, Fuchs, *Calcul des probabilités*
Barbe, Ledoux, *Probabilités*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*
(Candelpergher, *Théorie des probabilités*)

I Définitions, premières propriétés

1 La fonction caractéristique

Ouvrard : définition de la fonction caractéristique avec Fourier, premières propriétés (uniforme continuité).
Barbe Ledoux : inversion de Fourier
FFF : exemples de fonctions caractéristiques
En remarque, on peut étendre sa définition à $\mathbb{R}^d$.
Cottrell (p143) : Bochner-Herglotz (caractérisation des fonctions caractéristiques)

2 La transformée de Laplace

FFF : déf de la transformée de Laplace. On précise que l'on définit celle-ci plutôt comme la fonction génératrice des moments. Ça ne change presque rien. On insiste sur le fait qu'elle n'est pas définie partout. ex des $\mathcal{C}(1)$ dont l'intervalle de déf est réduit à 0.
ex de transformées p165 en remplaçant les it des fonctions caractéristiques par x (ou Cottrell p162). Premières propriétés.
Barbe Ledoux : p143 elle peut être inversée dans certains cas, mais ce n'est pas automatique comme pour φ_X.

On dit que ces deux transformées caractérisent la loi.

II Transformées et indépendance

Ouvrard pour fct carac/ FF pour Laplace : critère d'indépendance, loi de $X+Y$, exemples, contre exemple de lois vérifiant $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ et non indépendantes (Ouvrard, p228)
Ouvrard : Inégalité de Hoeffding

III Moments et dérivabilité

Ouvrard : moment d'ordre $n \Rightarrow \varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Réciproque partielle. Contre-exemple avec φ_X dérivable en 0 mais X n'a pas de moment d'ordre 1.
? : lemme de Stein-Gauss.
Ouvrard : Application au calcul de DL de la fonction caractéristique.
Application : calcul des moments.

FFF : analyticité de la transformée de Laplace si l'intervalle de définition est d'intérieur non vide, calcul des moments

IV Convergence en loi et TCL

1 Convergence en loi et fonctions caractéristiques

FFF : déf, théorème de Lévy, exemple sur des lois normales
Cottrell (p150) : équivalent du théorème de Lévy pour les fonctions de Laplace.
Ouvrard : Théorème des évènements rares de Poisson, théorème de Poisson.

2 Théorèmes limites

BL : LGN faible
Ouvrard : TCL
Applications : Moivre-Laplace, intervalles de confiances (dans Cadre, Vial), formule de Stirling...

262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

À rajouter : martingales, Schéffé, évènements rares de Poisson, plus de stats

Questions : → Soit $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrer que

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \underset{\lambda \to \infty}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

Une première idée est de prouver ce résultat pour les λ entiers. On note Y_i des variables aléatoires iid de loi $\mathcal{P}(1)$, alors $X_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{P}(n)$. Le TCL donne le résultat.
Pour le cas général, on remarque que

$$\varphi_{\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{-t^2/2} + o(1).$$

Le théorème de Lévy donne donc le résultat.

→ Métrisabilité de la convergence presque sure, de la convergence en proba ?

Remarques : Le jury attend des contre-exemples aux réciproques des implications entre les divers modes de convergence. On doit aussi parler de Slutsky et de son utilisation pour former des intervalles de confiance.

Références : Ouvrard, *Probabilités 2*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*
Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité, variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.
On fait le dessin d'implication des cv en annexe.

I Convergence presque sure et convergence en probabilité

1 Convergence presque sure, critères et exemples

Barbe, Ledoux : les déf équivalentes de la cv ps + le critère de Cauchy.
Ouvrard : unicité de la limite. Barbe, Ledoux : compatibilité avec les fonctions continues, la somme, le produit..., lemme de Borel-Cantelli pour la cv ps, l'exemple moche.
Ouvrard : le contre-exemple.

Inégalité de Hoeffding, critère de CV ps

2 Convergence en probabilité, exemples

BL : déf, cv ps implique cv en proba, les exemples 1 et 3.
Ouvrard : le contre-exemple pour dire que les cv ne sont pas équivalentes.
BL : la métrique de la cv en proba est métrisable, la distance, critère de Cauchy, la réciproque partielle par les sous-suites, l'application à la non-métrisabilité de la cv ps.
Compatibilité de la cv en proba avec les opérations usuelles et les fonctions continues.

3 Loi des grands nombres et applications

Ouvrard : les 4 LGN (et on admet la preuve de la dernière au minimum), à l'oral : on redonne les commentaires sur quand utiliser ces différentes lois, un exemple.
BL : un autre exemple.
Ouvrard : la méthode de Monte Carlo (on précise que ça marche mieux en grandes dimensions).

II Convergence L^p

BL : déf cv L^p, L^p est complet donc critère de Cauchy.
Briane, Pagès : inclusions entre L^p, implication topologique.
BL : cv L^p implique cv en proba, les deux contre-exemples.
Briane, Pagès : contre exemple à L^p implique cv ps + dessin.
? : en remontant les implications, si une suite cv L^p alors il existe une sous suite cv pp.
Ouvrard : la limite est unique, déf équi-intégrabilité, cas de la famille finie et majoré par une va intégrable (dans BL), la déf équivalente, thm de Vitali.

III Convergence en loi

1 Définition, exemples et propriétés

C'est le plus important ! C'est la cv adaptée aux variables aléatoires.
BL : déf.
? : un exemple pourri où la fonction de répartition est simple : par exemple, $X_n = \mathbb{1}_{[0,1-1/n]}$.
BL : impliquée par la cv en proba, contre-exemple $(-1)^n X_n$, si $X_n \Rightarrow c$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, la déf équivalente avec les fonctions continues bornées, thm de Lévy.
Ouvrard : exemple des $\mathcal{B}(n, p_n)$, application à la LGN faible (juste après), LGN forte.
Continuous mapping theorem, l'application, théorème de Slutsky (dans les exos).

2 Théorème central limite et application en statistique

Ouvrard : TCL.
Cadre, Vial : application du TCL à la détermination d'un intervalle de confiance, application pour oublier des variables inconnues et former d'autres intervalles de confiance, δ-méthode.

263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

À rajouter : densité conditionnelle, mettre le TCL avec les lois normales.

Remarques : Rapport du jury : "Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre l'indépendance et la convolution pourra être étudié.
Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0,1]$ et l'intérêt de ce résultat pour la simulation informatique.
Pour aller plus loin, certains candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite."
Cette leçon est nulle... Mais en plus, le titre est stupide car je peux mettre les variables aléatoires à densité par rapport à la mesure de comptage dans cette leçon...

Références : Ouvrard, *Probabilités 1 et 2*
Foata, Franchi, Fuchs, *Calcul des probabilités*
Barbe, Ledoux, *Probabilité*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*
Dupont, *Probabilités et statistiques pour l'enseignement*
Bercu, Chafaï, *Modélisation stochastique et simulation*

On met le tableau résumant les propriétés des lois classiques en annexe.

I Variables aléatoires à densité, opérations, exemples

1 Introduction aux densités de probabilités et quelques propriétés

Barbe, Ledoux : Mesures absolument continues, thm de Radon-Nikodym, définition d'une va à densité (mesure de Lebesgue, tribu borélienne, ...).
Ouvrard 1 : fonction de répartition, forme, continuité, elle ne charge pas les atomes, dérivabilité.
Théorème de transfert, moyenne, variance, moments d'ordre n.
Dupont/ Ouvrard 1/2 : on ponctue cette partie des exemples/contre-exemples des lois uniforme, de Cauchy, de Laplace et exponentielle. On rajoute ce qu'elles modélisent.

2 Compatibilité des densités avec les opérations usuelles et l'indépendance

Ouvrard 1 : densité des marginales, ex nul à inventer
fonction de variable aléatoire.
indépendance et densité, densité de la somme, exemple des lois $\Gamma(n, p)$.
Dupont : détails sur les lois $\Gamma(\lambda, p)$.

3 Fonction caractéristique

Ouvrard 2 : déf fonction caractéristique, c'est la TF de la densité, elle caractérise la loi, pleins d'exemples, inversion de Fourier, exemple de Cauchy/Laplace.
Moment d'ordre $n \Rightarrow \varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
Barbe, Ledoux : critère d'analyticité, théorème des moments.
Ouvrard 2 : critère d'indépendance, loi de $X + Y$, un exemple.
FFF : théorème de Lévy.

II Variables aléatoires gaussiennes

1 La loi normale

Dupont : la loi normale, graphe de sa densité, symétrie, rôle de cette loi dans l'étude d'erreurs.

2 Vecteurs gaussiens

Barbe, Ledoux : déf vecteur gaussien, espérance, matrice de covariance, la densité quand elle existe, indépendance.
Dupont : la loi du χ^2 (définie par la somme de normales au carré, donc la norme d'un vecteur gaussien), sa densité.
Cadre, Vial : théorème de Cochran et Fisher, on en profite pour définir la loi de Student et on donne sa densité.

III Simulation de variables aléatoires

Bercu, Chafaï : modélisation de loi uniforme par congruence.
Méthode d'inversion, modélisation des lois exponentielle et de Cauchy.
Méthode de rejet, exemple d'une loi uniforme sur un cercle.
Théorème + algorithme de Box-Muller.
Ouvrard 2 : Modélisation de suites de variables aléatoires indépendantes.

IV Utilisation en statistique

1 Construction d'intervalles de confiance

Ouvrard 2 : TCL (utilise Lévy et les lois normales).
Cadre, Vial : application au calcul d'intervalles de confiance.

2 L'estimateur du maximum de vraisemblance

Dupont : on ne fait que le cas du produit tensoriel de mesures à densités par rapport à la mesure de Lebesgue. Déf de la vraisemblance avec exemple des lois normales, idée : on cherche là où la densité est la plus forte, déf de l'EMV.
On dit qu'en pratique, il fournit de bons résultats mais son existence et son unicité sont toujours à vérifier.
Exemple des lois normales.
Cadre, Vial : exemple des lois exponentielles.

264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

À rajouter : Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable

Remarques : Rapport du jury : "Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté.
Les techniques spécifiques aux variables discrètes devront être abordées (comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée.
Pour aller plus loin, les candidats ambitieux pourront étudier les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables."

Références : Ouvrard, *Probabilités 1 et 2*
Cadre, Vial, *Statistique mathématique*
Dupont, *Probabilités et statistiques pour l'enseignement*
Bercu, Chafaï, *Modélisation stochastique et simulation*
Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*

On met le tableau résumant les propriétés des lois classiques en annexe.

I Variables aléatoires discrètes, exemples

1 Qu'est-ce qu'une loi discrète ?

Ouvrard 2 (début) : ce sont des lois à densité par rapport à la mesure de comptage.
Ouvrard 1 : espace de probabilité discret, forme de la proba d'un ensemble discret, germe d'une proba discrète, le lemme.

2 Quelques lois usuelles

Dupont : ex des lois uniforme, géométrique, de Bernoulli et de Poisson.
Ouvrard 1 : la loi hypergéométrique.

II Opérations et outils

1 Variables aléatoires discrètes et indépendance

Ouvrard 1 : déf d'évènements indépendants, de variables aléatoires indépendantes, le critère discret.
Somme de va indépendantes, ex de la loi triangulaire.
Dupont : déf/ caractéristiques de la loi binomiale, pareil avec la binomiale négative.
Zuily, Queffelec : Théorème de Weierstrass

2 Espérance et moments d'une loi discrète

Ouvrard 1 : déf espérance, thm de transfert.
? : contre-exemple $\mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$, alors on n'a pas d'espérance.
Dupont/Ouvrard 1 : quelques calculs + toutes les espérances dans le tableau en annexe.
Ouvrard 1 : déf variance, variance de la somme de lois indépendantes.
Dupont/Ouvrard 1 : quelques calculs + toutes les variances dans le tableau en annexe.

3 Fonction génératrice des moments

Ouvrard 1 : fonction génératrice des moments, les petites propriétés, le lien avec l'indépendance et les moments, quelques exemples.

III Convergence de variables aléatoires discrètes

1 Différents types de convergences

Ouvrard 2 : réécrire la CV ps pour une va discrète, c'est de la cv simple sur tous les atomes chargés, si tous les atomes sont chargés et il n'y en a qu'un nombre fini, on a de la cvu, réécrire la cv en proba, déf cv en loi, le critère discret.
Ouvrard 1 : application au théorème de Poisson.

2 Fonctions caractéristiques des variables aléatoires discrètes

Ouvrard 2 : déf fonction caractéristique, elle caractérise la loi.
Ouvrard 1 : les fonctions caractéristiques de toutes les lois classiques discrètes.
Ouvrard 2 : critère d'indépendance, loi de $X + Y$, exemple de la binomiale, théorème de Lévy, application à une autre preuve du théorème de Poisson.

IV Simulation et estimation

1 Méthodes de simulation de variables aléatoires

Bercu, Chafaï : modélisation de loi uniforme par congruence.
Méthode pour obtenir Bernoulli et Rademacher par une loi uniforme, la méthode de simulation globale, l'appli-

cation à la loi uniforme, à la loi géométrique, simulation de la loi binomiale, méthode du rejet.
Ouvrard 2 : $\boxed{\text{Modélisation de suites de variables aléatoires indépendantes}}$

2 Loi des grands nombres et estimateurs

Ouvrard 2 : LGN faible et Kolmogorov-Khintchine, application au thm de Bernoulli.
Cadre, Vial : méthode des moments, la moyenne empirique est un estimateur fortement consistant.

3 Estimer des paramètres et des lois

Ouvrard 2 : TCL.
Ouvrard 1 : Moivre-Laplace avec les dessins.
Cadre, Vial : application au calcul d'intervalles de confiance.
Le test du χ^2 d'adéquation, l'exemple avec l'usine de bonbons.