217 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

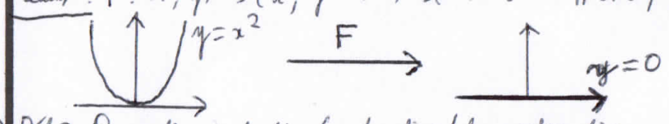
I - Sous-variétés, définitions et exemples

1) Qu'est-ce qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?

[ROU] p.197 **Déf 1**: Soit M sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$, $d \in \mathbb{N}$, alors M est <u>lisse</u> en a, de dimension d s'il existe un difféomorphisme F de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage ouvert U de a sur $F(U)$ voisinage ouvert de 0, qui transforme M en un ses de dimension d, i.e $F(M \cap U) = N \cap F(U)$ avec $N = \mathbb{R}^d \times \{0\}$.

[ROU] p.197 **Déf 2**: (Carte locale) M est une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si M est lisse de dimension d en chacun de ses points.

exemple: $F : (x, y) \to (x, y - x^2)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.



donc la parabole est une sous-variété de dimension un.

[ROU] p.198 **Déf 3**: On appelle courbe lisse / surface lisse / hypersurface lisse une sous-variété de dimension $1/2/n-1$.

exemples: L'ellipse est une courbe lisse, le cône privé de son sommet est une surface lisse, $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ est une hypersurface lisse.

2) Théorème des sous-variétés

[LAF] p.29 **Théorème 4**: $M \subset \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.

(ii) (déf implicite) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$.

(iii) (déf paramétrique) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 et une application $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$ tel que $h(0) = a$.

(iv) $\forall a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ contenant $(a_1, \dots, a_d)$ (graphe) et une application lisse G de V dans $\mathbb{R}^{n-d}$ telle que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit le graphe de G.

[LAF] p.30 exemples:
- $\mathbb{S}^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ la sphère, est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ par (ii).
- $\mathbb{T}^n = \{x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1) = 0\}$ le tore, est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension n par (iii) avec $h|(t_1, \dots, t_n) \to (\cos t_1, \sin t_1, \dots)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.
- $G = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ par (iv).

Rq: (ii) $\Rightarrow$ (iv) est le théorème des fonctions implicites.

3) Qu'est-ce qui n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?

- Le graphe d'une fonction non lisse n'est pas une sous variété (par (iv))

exemple: $\{(x, |x|), x \in \mathbb{R}\}$

- Par (ii), on a des courbes non lisses,

exemple: $y^2 - x^3 = 0$

- Une courbe avec un point double n'est pas une sous variété (même si le point double est à l'infini).

exemples: $x^2 - y^2 = 0$, $t \to \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, $t > -1$

- Une variété ne peut avoir plusieurs dimensions.

exemple: le cône passe de la dimension 2 à la dimension 0 en son sommet

voir annexe 1

[ROU] p.269-273

II - Espaces tangents

1) Définition

[LAF] p.33-34 **Déf 5**: On dit qu'un vecteur v est tangent en un point a de $A \subset \mathbb{R}^d$, s'il existe une application différentiable $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^d$ telle que $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset A$, $c(0) = a$ et $c'(0) = v$.

Prop 6: Les vecteurs tangents en un point à une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-espace vectoriel de dimension d.

Déf 7: L'espace tangent à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$, en un point a, noté $T_a M$ est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^n$ tels que $m - a$ soit tangent à M en a.

Application: si $M : y^2 - x^3 = 0$ était une sous-variété de dimension 1, l'espace tangent en $(0,0)$ serait de dimension 1, or il est de dimension 0 donc c'est faux !

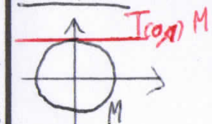
[ROU] p.201 **Prop 8**: Avec les notations du théorème 4, l'espace tangent à M en a est

(ii) $\mathrm{Ker}(Dg(a)) + a$

(iii) $\mathrm{Im}(Dh(0)) + a$

(iv) Le graphe de $DG(a_1, \dots, a_d)) + a$

Exemple:



(ii) $M : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; $Dg(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(Dg(0,1)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(iii) $M : h(t) = (-\sin t, \cos t)$; $Dh(0) = (-1, 0)$

$\mathrm{Im}(Dh(0)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(iv) $G(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $DG(0) = 0$

graphe de $DG(0) = \{(x, y), y = 0\}$

Donc $T_{(0,1)} M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\}$

2) Position d'une surface par rapport à son plan tangent

[LAF] p 34 — Soit S une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \in S$, le plan tangent en (a,b,c) est alors de la forme :

(i) $(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = 0$

(ii) $(u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} a + \frac{\partial g}{\partial u}(0,0)u + \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)v \\ b + \frac{\partial h}{\partial u}(0,0)u + \frac{\partial h}{\partial v}(0,0)v \\ c + \frac{\partial k}{\partial u}(0,0)u + \frac{\partial k}{\partial v}(0,0)v \end{pmatrix}$

DVP 1

[ROU] p 354 — **Lemme (de Morse) 9 :** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, alors si $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$, on a existence de φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$

[LAF] p 34 — Si f $\mathcal{C}^3$ et $D^2f(a)$ non dégénérée, on peut appliquer Morse sur $g(x) = f(x+a) - Df(a)x$ pour avoir $f(x) - f(a) - Df(a)x = \varphi_1^2(x) + \dots$

Application : L'intersection de la surface S avec son plan tangent en $a \in S$ est localement déterminé par l'espace isotrope de la forme quadratique de signature égale à celle de la Hessienne $D^2f(a)$, si $D^2f(a)$ est non dégénérée.

En particulier, S ne coupe son plan tangent que si $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (1,1)$. (voir annexe 2).

3) Extrema sur une variété

[AVE] p 102-103 — **Définition 10 :** U ouvert intersectant M sous-variété, on dit que f (fonction réelle) présente un extremum lié en $m \in U \cap M$ si $f|_{U\cap M}$ admet un extremum local en m.

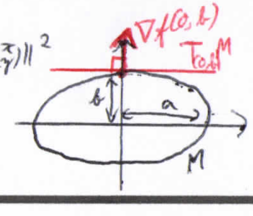
Théorème 11 : si f est $\mathcal{C}^1$, il faut que $Df(m)|_{T_m(M)} = 0$ pour que m soit un extremum lié.

[OA] — **Interprétation :** si M est défini par $g(x) = 0$, alors le théorème 11 s'énonce
$\bigcap_{i=1}^{n-d} \mathrm{Ker}(Dg_i(m)) \subset \mathrm{Ker}(Df(m))$ ou encore $\nabla f(m)$ est orthogonal à $T_m M$.

[ROU] p 408-409 — **Exemple :** $g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2 = \left\|\binom{x}{y}\right\|^2$

$\nabla f(x,y) = \binom{2x}{2y}$

si $a \neq b$, 4 extrema : $(\pm a, 0)$ et $(0, \pm b)$



[AVE] p 103 (modifié) — **Théorème 12 :** Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g_1, \dots, g_k$ $\mathcal{C}^1$ définies sur U, réelles et linéairement indépendantes en $a \in U$, alors les zéros communs des g_i définissent localement une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$. Alors si $f : U \to \mathbb{R}$ et si f a un extremum lié en a, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_k Dg_k(a)$.

Rq : les $(\lambda_i)_i$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Corollaire 13 : Un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien possède une base orthonormée de vecteurs propres.

[ROU] p 408-409 — **Corollaire 14 :** Les extremums de $f(x) = \|x\|^2$ sur la quadrique $Q(x) = 1$ sont les intersections de celles-ci avec les sous espaces-propres de A la matrice de Q.

Remarque : le lemme morse donne aussi que si $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^3$ et $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est non dégénérée, alors f a un minimum local strict en a si et seulement si $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (n,0)$; et un maximum local strict ssi $\mathcal{E}(D^2f(a)) = (0,n)$.

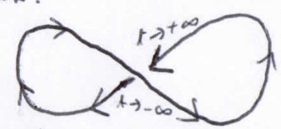
III - Quelques exemples fondamentaux de sous-variétés.

1) Sous-variétés de dimension 1

[DG] p 312 — **Définition 15 :** On appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^p$ de $\mathbb{R}^2$, un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^2)$ et f est une immersion.

Remarque : $\forall t \in I$, il existe J voisinage de t dans I tel que $f(J)$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. $f(I)$ n'est pas une sous-variété en général, même si f est injective.

exemple :



f injectif et ce n'est pas une sous variété.

Définition 16 : deux arcs paramétrés de $\mathbb{R}^2$ (I, f) et (J, g) sont dits $\mathcal{C}^p$ équivalents si ils sont de classe $\mathcal{C}^p$ et il existe θ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre I et J tel que $f = g \circ \theta$. Un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^p$ de $\mathbb{R}^2$ est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés.

[DG] p 317 — **Prop 17 :** si (I, f) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, la tangente à (I, f) en $t \in I$ est le sous-espace affine de dimension 1 : $\mathbb{R} f'(t) + f(t)$.
Cet espace ne dépend pas de la paramétrisation choisie et on peut donc l'étendre aux arcs géométriques.

[DG] p 323 — **Déf 18 :** On appelle paramétrisation par la longueur d'arc d'un arc géométrique C de $\mathbb{R}^2$, toute paramétrisation $(I, f) \in C$ telle que $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| = 1$

Prop 19 : Pour tout arc géométrique C, il existe des l.a. paramétrisations. Si (I, f) en est une, elles sont de la forme $f(t+a)$ ou $f(-t+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple : pour le cercle, une l.a. paramétrisation est

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

[BG] p 325 **Définition 20 :** La longueur de l'arc (I, f) de a à b avec $a, b \in I$ est $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Proposition 21 : $\int_I \|f'(t)\| dt$ est indépendante de la paramétrisation choisie.

Exemple : pour la paramétrisation usuelle de l'ellipse, la longueur est, avec $a > b$,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)}\, dt \text{ avec } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

[BG] p 325 **Définition 22 :** le vecteur tangent en un point m de la courbe est $\tau(m) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ pour (I, f) une paramétrisation.

[BG] p 326-328 **Définition 23 :** Si (I, f) est une l.a. paramétrisation, $\|f''(t)\|$ est appelé la courbure et est noté $K(t)$.

Proposition 24. Si (I, g) est une paramétrisation quelconque alors la courbure est

$$K(t) = \frac{\| g'(t) \wedge g''(t) \|}{\| g'(t) \|^3} \text{ avec } \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a|b)^2$$

Exemple : Pour l'ellipse $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$, on a

$$K(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}$$

Si $a = b$, on retrouve la courbure du cercle $K(t) = \frac{1}{a}$.

[CL3] p 191 **Déf 24.** Un point où la courbure est ~~nulle~~ extrémale est appelé sommet.

Théorème (des quatre sommets) 25 : Toute courbe convexe simple C^3 a au moins quatre sommets.

[BG] p 363 **Def 25 :** Si C est une courbe fermée simple, elle est la frontière d'un compact de $\mathbb{R}^2$, donc on peut définir son aire comme l'aire de ce compact.

Théorème 26 : pour toute courbe fermée simple C de classe $\mathcal{C}^2$, la longueur de C est supérieure à $\sqrt{4\pi \text{ aire}(C)}$. Le cas d'égalité n'est vérifié que pour un cercle.

Exemple : Avec l'ellipse, si $a > b$, $\left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)}\, dt \right)^2 > \frac{\pi^2 b}{4a}$

Théorème 27 : Une sous-variété connexe de dimension 1 est soit difféomorphe à S^1, soit à $\mathbb{R}$. (admis) [CL3] p 203

2) Sous-variétés de matrices

Proposition 28. Les matrices de rang donné $r \in]\!]0, n[\![$ forment une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - (n-r)^2$. [ROU] p 286

Proposition 29 : tout ouvert d'une sous-variété de dimension n est une sous-variété de dimension n. [H2G2] p 268

Corollaire 30. $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2, son espace tangent en tout point est $M_n(\mathbb{R})$.

Définition 31. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{L}_G = \{ M \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G \}$ l'algèbre de Lie associée à G. [GT] p 81-84

Proposition 32 : $\mathcal{L}_G$ est une algèbre et un espace vectoriel. $\boxed{\text{DVP 2}}$

$\boxed{\text{Théorème 33 : Tout sous-groupe fermé } G \text{ de } GL_n(\mathbb{R}) \text{ est une sous-variété de } GL_n(\mathbb{R}) \text{ (donc de } M_n(\mathbb{R})\text{). (Cartan Von Neumann)}}$

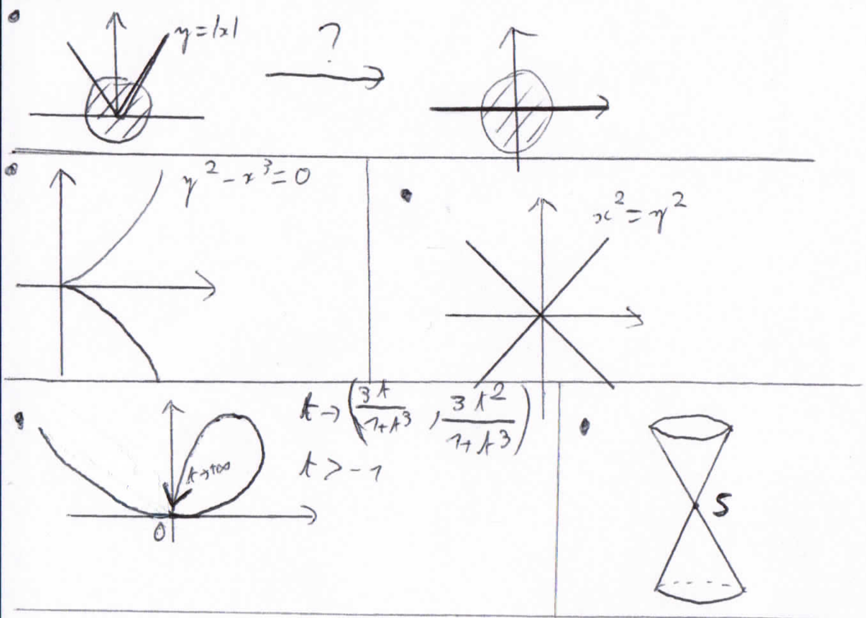
Corollaire 34. $SL_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$. [MT] p 64-70

Proposition 35. L'espace vectoriel tangent à G en I_n est $\mathcal{L}_G$.

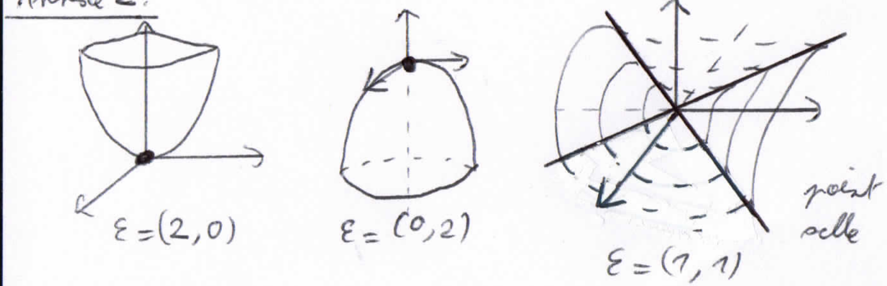
Corollaire 36. Les espaces tangents à $SL_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ en I_n sont $\mathrm{Trace}^{-1}(\{0\})$, $A_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.

Proposition 37 : G est discret si et seulement si $\mathcal{L}_G = \{0\}$. [GT] p 81-84

Annexe 1 :



Annexe 2 :



Références :

[ROU] : Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
[LAF] : Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles
références majeures

[AVE] : Avez, Calcul différentiel

[OA] : Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation

[BG] : Berger, Gostiaux, Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces
(référence sur les courbes, il y a aussi le Laville qui est plus accessible)

[CL3] : Chambert-Loir, Fermigier, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, analyse 3

[H2G2] : Caldero, Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries
[GT] : Gonnord, Tosel, Thèmes d'analyse pour l'agrégation – Calcul différentiel
[MT] : Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classique

références sur les variétés de matrices, le MT est obscur mais excellent.