215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F deux espaces vectoriels normés

I - Notions générales sur la différentiabilité

1) Définition et exemples

Déf 1 : Soit E et F deux espaces normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit U ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ si il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(a+h) - f(a) = L(h) + R(h)$ avec $R(h) = o(\|h\|)$.

Prop 2 : Si elle existe, L est unique ; on la note $Df(a)$.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors pour $a \in \mathbb{R}$, $Df(a)(h) = f'(a)h$ avec $f'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (si cette limite existe).

$\boxed{\text{annexe 1}}$

Déf 3 : Si f est différentiable sur $U \subset E$ ouvert et $a \to Df(a)$ est continue, on dit que f est continûment dérivable, ou de classe $\mathcal{C}^1$.

Contre-exemple : $x \to \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable mais n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Prop 4 :
- $D(f+g) = Df + Dg$ pour f et g fonctions
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $D(\lambda f) = \lambda Df$
- $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ (Dérivation des fonctions composées)

Application : si f inversible, $Df^{-1}(a) = Df(f^{-1}(a))^{-1}$.

Exemples :
- si $f = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, alors $Df = 0$
- Si f est linéaire, $\forall a \in \mathbb{K}$, $Df(a) = f$
- Si f est n-linéaire, $Df(a_1, a_2, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n)$

2) Dérivées partielles

Déf 5 : Si $E = \mathbb{R}^n$ et si $(e_i)_{1\le i\le n}$ est une base, on pose, si elle existe,
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$
C'est la dérivée partielle de f dans la direction (e_i).

On peut généraliser cette notion à toute direction $v \in E$ par :
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Prop 6 : si f est différentiable, elle a des dérivées partielles dans toutes les directions.

Contre-exemple : $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ a des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en ce point.

Exemple : l'application $\det$ est différentiable et $D\det(M)(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$

Thm 7 : si les dérivées partielles existent et sont continues, f est $\mathcal{C}^1$.

3) Différentielles d'ordre supérieur

→ À partir d'ici, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$.

Déf 8 : si f est différentiable sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et si $x \mapsto Df(x)$ est différentiable en $a \in U$, alors f est 2 fois différentiable en a et $D^2 f(a) = D(Df)(a)$.

Si (e_i) est la base canonique et si on note $H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ et $F = \mathbb{R}$

en tout point x où f est 2-fois différentiable et en notant $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ on obtient la Hessienne de f.

On a alors $D^2 f(x)(h,k) := D(Df)(a)(h)(k) = {}^t h H k$ et $D^2 f$ est une forme bilinéaire.

Rq : On définit la classe $\mathcal{C}^2$ comme ~~séparément~~ en disant que $x \to D^2 f(x)$ est continue.

- On peut étendre toutes les définitions pour définir la k-differentiabilité et la classe $\mathcal{C}^k$.

Thm 9 : Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est 2 fois différentiable, alors $D^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique (Schwarz).

Thm 10 : (formules de Taylor)

- Si f est k-fois differentiable en $a \in U$, on a
$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h,\dots,h) + \underset{\|h\| \to 0}{o}(\|h\|^k)$$
- Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ et $[a, a+h] \subset U$, alors
$$f(a+h) = f(a) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h,\dots,h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h,\dots,h)\,dt$$
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ ~~est de classe~~ $\mathcal{C}^n$ et ~~est~~ $(n+1)$-fois dérivable, alors $\forall c \in]a,b[$,
$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (b-c)^k \right\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-c)^{n+1}.$$

II - Utilisation en calcul différentiel

1) En Analyse réelle

Thm 11 (de Rolle) : Si f est différentiable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $Df(c) = 0$.

Thm 12 : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^n$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Thm 13 : (Darboux) : Si $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, alors si f est dérivable, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

2) Théorèmes d'inversion locale et sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Déf 14 : $f : V \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme si elle est $\mathcal{C}^k$ et admet une bijection réciproque $\mathcal{C}^k$.

Exemple : exp est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$t \to t^3$ n'est pas un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ autour de 0.

Thm 15 : Soit f $\mathcal{C}^k$ de U vers $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$ tel que $Df(a)$ est inversible. Alors il existe $V \subset U$ ~~ouvert~~ avec $a \in V$ tel que $f : V \to f(V)$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Déf 16 : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in M$, $\exists\, U \in \mathcal{V}_0(x)$ et $V \in \mathcal{V}_0(0)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$ difféo tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$

$\to p$ est unique.

Thm 17 (des sous-variétés) : Les propriétés suivantes sont équivalentes : pour $M \subset \mathbb{R}^n$:

(i) M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\forall a \in M$, il existe $U \in \mathcal{V}_0(a)$ de $\mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de différentielle surjective telle que $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$

(iii) $\forall a \in M$, $\exists\, U \in \mathcal{V}_0(a)$ de $\mathbb{R}^n$ Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$ et de différentielle injective.

(iv) $\forall a \in M$, $\exists\, U \in \mathcal{V}_0(a)$ dans $\mathbb{R}^n$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et G $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que, $U \cap M$ soit le graphe de G (quitte à permuter les coordonnées).

Exemples : $\boxed{\text{annexe 2}}$

Thm 18 (Von-Neumann) : Soit G sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$ (donc de $M_n(\mathbb{R}) \underset{\text{iso}}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$).

$\boxed{\text{DVP}}$

Applications : • $O(n)$, $SO(n)$, $SL(n)$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.

3) Équations différentielles

Déf 19 : une équation différentielle est une équation de la forme
$y'(t) = f(t, y)$ où $f : U \to \mathbb{R}^n$ et U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Thm 20 : Si f est localement lipschitzienne, le problème $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale. Si de plus f est globalement lipschitzienne, la solution est **globale.**

Déf 21 : On dit que la solution y tel que $y(t_0) = y_0$ est stable si il existe une boule $\bar{B}(y_0, r)$ tel que toute solution z telle que $z(t_0) \in \bar{B}(y_0, r)$ soit définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\|y(t) - z(t)\| \leq C \|z(t_0) - y_0\|$ avec C cste fixée.

Thm 22 : (de Lyapounov) : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$, on note $A = Df(0)$ alors si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, le système $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x \end{cases}$ est stable en 0 et il en va de même pour $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$.
De plus y tend exponentiellement vite vers zéro.

III - Applications en optimisation

1) Conditions de minimalité

• **Conditions libres :**
U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$

Thm 23 : • si a est un minimum local et si $Df(a)$ existe alors $Df(a) = 0$
• si f a un minimum local et si $D^2 f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive.
• si $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est définie positive alors f a un minimum local en a.

Contre-exemples aux réciproques : $x \to x^3$ et $x \to x^4$

Application : **Thm 24 : (Lemme de Morse)** si $f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^3$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $0 \in U$ et si $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors $\exists\, \varphi$ $\mathcal{C}^1$ difféo entre 2 voisinages ouverts de 0, tel que si $u = \varphi(x)$, $(\varphi(0) = 0)$
$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ $\boxed{\text{Annexe 3}}$

• **Conditions liées**

Thm 25 : (extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_p$ $\mathcal{C}^1$ de $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soit X l'ensemble défini par $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$ avec $x \in U$. Alors si $f|_X$ a un extremum local en $a \in X$ et si $Dg_1(a) \dots Dg_p(a)$ sont indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_p Dg_p(a)$.

Exemple : • $\forall x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ avec $\sum \alpha_i = 1$, on a
$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$
• Si on se donne un parallélépipède rectangle de volume V fixé et de longueurs x, y, z.
Alors son aire sera minimale ssi $x = y = z$.

2) Recherche numérique

→ gradient à pas fixe : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
soit $\mu > 0$, on pose pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} = x_n - \mu \nabla f(x_n)$

Thm 26 : si f est α-convexe et différentiable et si Df est lipschitzienne, alors pour μ assez petit, l'algorithme converge vers l'unique minimum de f.

rappel : f est α-convexe ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{\alpha}{8}\|x - y\|^2$

→ gradient à pas optimal dans un cas "simple" :
si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ avec $\begin{pmatrix} A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$
alors on pose $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{n+1} = x_n + t_n d_n$ où $d_n = -\nabla f(x_n)$
et t_n est l'unique réel positif minimisant $t \to f(x_n + t d_n)$.
Alors on a en notant $\bar{f} = \min f$ et $\bar{x}$ le x associé, et $c(A)$ le conditionnement (2) de A :

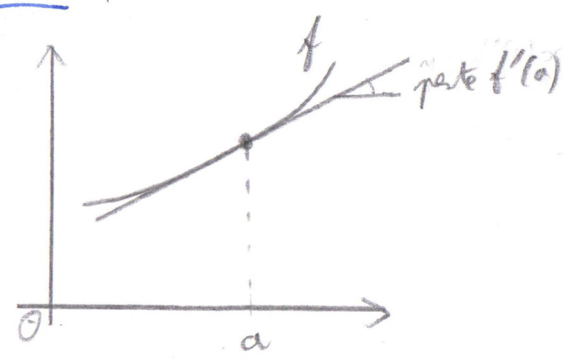
Thm 27 : $f(x_k) - \bar{f} \leq (f(x_0) - \bar{f}) \left(\frac{c(A) - 1}{c(A) + 1}\right)^{2k}$

et $\|x_k - \bar{x}\| \leq \left(\frac{2(f(x_0) - \bar{f})}{\min \mathrm{Sp}(A)}\right)^{1/2} \left(\frac{c(A) - 1}{c(A) + 1}\right)^k$

→ méthodes de Newton
On pose $x_{n+1} = x_n - Hf(x_n)^{-1} \nabla f(x_n)$ si f est $\mathcal{C}^3$ et ∇f ne s'annule pas au voisinage du minimum.
Alors la convergence est quadratique, i.e. $\|x_{n+1} - a\| \leq C \|x_n - a\|^2$ pour x_0 assez proche du minimum.

Annexes:

Annexe 1:

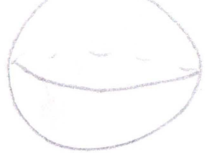


Annexe 2:

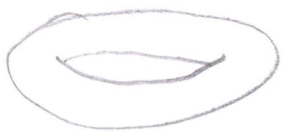
(ii) $S^n = \{x=(x_0,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^{n+1} / x_0^2+\dots+x_n^2-1=0\}$

sous-variété de dimension n

par $f(x) = x_0^2+\dots+x_n^2-1$

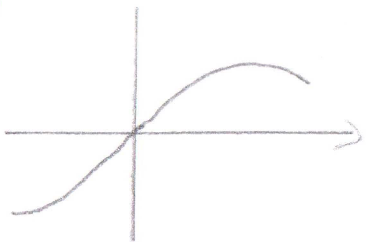


(iii) $\mathbb{T}^n = \{x=(x_1,\dots,x_{2n})\in \mathbb{R}^{2n} / (x_1^2+x_2^2-1,\dots,x_{2n-1}^2+x_{2n}^2-1)=0\}$



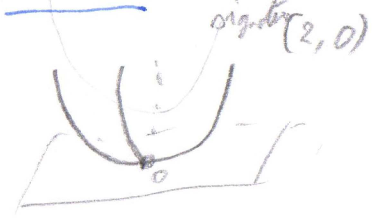
$h : (t_1,\dots,t_n) \to (\cos(t_1), \sin(t_1), \dots, \cos(t_{2n}), \sin(t_{2n}))$

(iv)

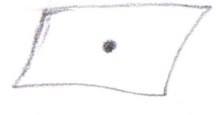


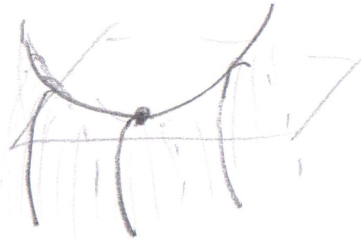
$M = \{(x, \sin x), x\in\mathbb{R}\}$

Annexe 3:



$\to$ $f(x)-f(0) = u_1^2+u_2^2$





$\xrightarrow{\varphi}$

$f(x)-f(0) = u_1^2-u_2^2$